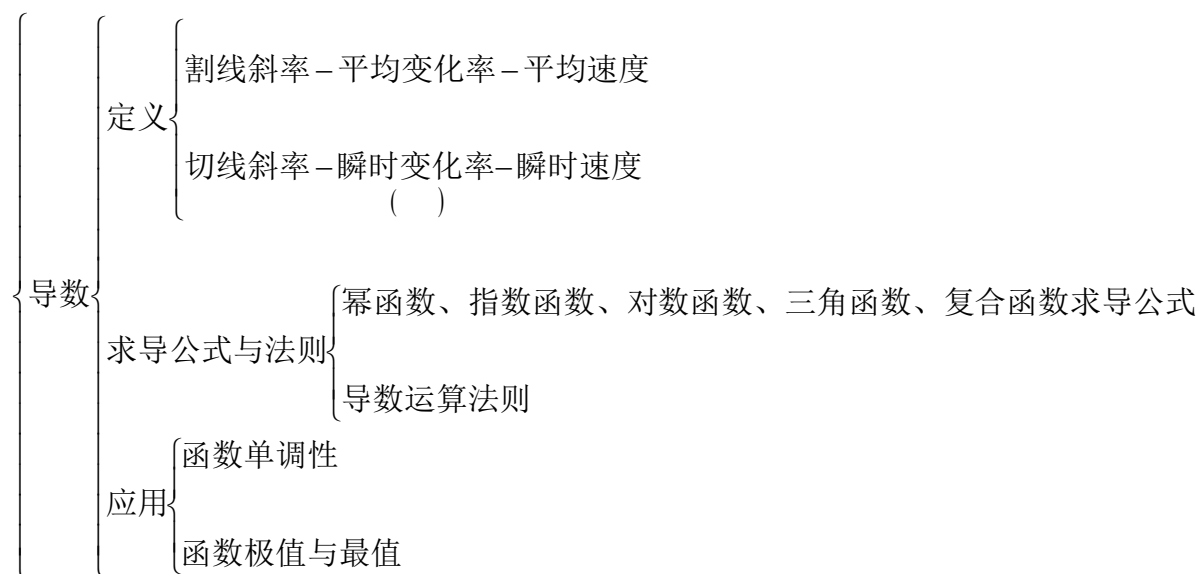


## 第 12 章 导数及应用

### 一 导数



例 1. 若物体运动路程与时间的方程是  $S=3+t^2$  (均采用国际单位), 则物体在前 2 秒的平均速度是\_\_\_\_\_;  $t=2s$  时的瞬时速度是\_\_\_\_\_.

例 2. 抛物线  $f(x) = x^2 + x + 1$  在点  $(0,1)$  处切线方程为\_\_\_\_\_.

过点  $A(-1,0)$  且与  $f(x)$  相切的直线方程是\_\_\_\_\_.

例 3. 已知函数  $f(x) = \ln x + \ln(2-x) + x (a > 0)$ .

(1)  $a=1$  时, 求函数的单调区间和极值;

(2)  $x \in (0,1]$  时,  $f(x) \leq \frac{1}{2}$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

## 导数综合应用

### 二 切线问题核心等式

若点  $P(x_0, y_0)$  是  $f(x)$  上的点, 求  $P$  处的切线, 则

$$f(x_0) = y_0$$

$$f'(x_0) = k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (k \text{ 为点 } P \text{ 处切线斜率; 特别的, 当 } P \text{ 为极值点时 } k=0)$$

### 三 利用导数求原函数的单调性

1. 导函数的符号确定原函数的单调性,

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 \text{ 且 } f'(x) \text{ 不连续为 } 0 \Rightarrow f(x) \text{ 单调递增} \\ f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ 单调递增} \end{cases}$$

2. 讨论含参数函数的单调性. (即讨论导函数的符号情况)

### 四 极值与最值

1. 极值定义及求法

2. 最值的定义与求法

### 五 1. 零点的定义,

2. 求零点的方法,

3. 零点存在定理.

### 六 不等式证明处理方法

1. 不等式证明首先简化或转化研究对象

2. 恒成立问题及存在性问题解答方法

$$3. kf(x) - g(x) \geq 0, kf(x) \geq g(x), k \leq \frac{g(x)}{f(x)} \quad (\text{两边同时除以负数时改变不等号})$$

方向).

4. 常见初等函数不等关系.

例 1. 已知函数  $f(x) = e^{ax} \cdot \sin x - 1$ , 其中  $a > 0$ .

(I) 当  $a=1$  时, 求曲线  $y=f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(II) 证明:  $f(x)$  在区间  $[0, \pi]$  上恰有 2 个零点.

例 2 已知函数  $f(x)=x^2-ax-a^2\ln x$  ( $a\in\mathbf{R}$ ).

(I) 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(II) 若  $f(x)\geq 0$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

例 3 已知函数  $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $f(x)$  有两个零点, 求  $a$  的取值范围.

例 4 已知函数  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 - 2x (a \in R)$ .

(I) 当  $a=3$  时, 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(II) 若对于任意  $x \in (1, +\infty)$  都有  $f'(x) < a-2$  成立, 求实数  $a$  的取值范围;

(III) 若过点  $(0, -\frac{1}{3})$  可作函数  $y=f(x)$  图象的三条不同切线, 求实数  $a$  的取值范围.

例 5 已知函数  $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$ .

(I) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(II) 若  $f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2$ , 证明:  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$ .

例 6 已知函数  $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2$  有两个零点.

(I) 求  $a$  的取值范围;

(II) 设  $x_1, x_2$  是  $f(x)$  的两个零点, 证明:  $x_1 + x_2 < 2$ .

例 7 已知函数  $f(x) = ax^2 - ax - x \ln x$ , 且  $f(x) \geq 0$ .

(1) 求  $a$ ;

(2) 证明:  $f(x)$  存在唯一的极大值点  $x_0$ , 且  $e^{-2} < f(x_0) < 2^{-2}$ .

例 8 已知函数  $f(x) = x - 1 - a \ln x$ .

(1) 若  $f(x) \geq 0$ , 求  $a$  的值;

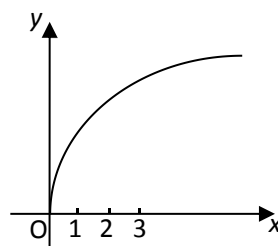
(2) 设  $m$  为整数, 且对于任意正整数  $n$ ,  $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < m$ , 求  $m$

最小值.

## 七 函数综合小题

1. 函数  $f(x)$  的图像如图所示, 则下列排序正确的是

- A.  $0 < f'(2) < f'(3) < f(3) - f(2)$
- B.  $0 < f'(3) < f(3) - f(2) < f'(2)$
- C.  $0 < f'(3) < f'(2) < f(3) - f(2)$
- D.  $0 < f(3) - f(2) < f'(2) < f'(3)$



2. 直线  $y=a$  分别与直线  $y=2x+2$ , 曲线  $y=x+\ln x$  交于 A、B 两点, 则  $|AB|$  的最小值为

- A. 3
- B. 2
- C.  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$
- D.  $\frac{3}{2}$

3. 已知  $f(x) = \ln x + \ln(2-x)$ , 则下列说法正确的是

- A.  $f(x)$  在  $(0, 2)$  单调递增
- B.  $f(x)$  在  $(0, 2)$  单调递减
- C.  $f(x)$  关于  $x=1$  对称
- D.  $f(x)$  关于  $(1, 0)$  对称.

4. 设定义域为  $\mathbb{R}$  的函数  $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & x > 0 \\ -x^2 - 2x, & x \leq 0 \end{cases}$  若关于  $x$  的函数

$y = 2[f(x)]^2 + 2bf(x) + 1$  有 8 个不同的零点, 则实数  $b$  的取值范围是\_\_\_\_\_

5.  $f(x)$  为  $\mathbb{R}$  上的单调递增函数, 且对任意实数  $x$ , 都有  $f[f(x) - e^x] = e + 1$ ,

则  $f(\ln 2) =$

- A. 1
- B.  $e+1$
- C. 3
- D.  $e+3$

6. 设函数  $f(x) = e^x + 2x - 4$ ,  $g(x) = \ln x + 2x^2 - 5$ , 若实数  $a, b$  分别是  $f(x)$ ,

$g(x)$  的零点, 则

- A.  $g(a) < 0 < f(b)$
- B.  $f(b) < 0 < g(a)$
- C.  $0 < g(a) < f(b)$
- D.  $f(b) < g(a) < 0$

7. 函数  $y = f(x)$  的图像上不同两点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  处的切线斜率分别为  $k_A$ ,

$k_B$ , 规定  $\varphi(A, B) = \frac{|k_A - k_B|}{|AB|}$  叫做曲线  $y = f(x)$  在点 A 与点 B 之间的“弯曲度”, 则下

列命题为真命题的序号是

- ①  $y = x^3 - x^2 + 1$  图像上两点 A 与 B 的横坐标分别为 1, 2, 则  $\varphi(A, B) > \sqrt{3}$ ;
- ② 存在这样的函数, 其图像上任意两点之间的“弯曲度”为常数;
- ③ 设点 A, B 为抛物线  $y = x^2 + 1$  上不同的两点, 则  $\varphi(A, B) \leq 2$ ;
- ④ 设曲线  $y = e^x$  上不同两点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  且  $x_1 - x_2 = 1$ , 若  $t \cdot \varphi(A, B) < 1$  恒成立, 则实数  $t$  的取值范围是  $(-\infty, 1)$ .

- A. ①②
- B. ②③
- C. ③④
- D. ②③④