

第4章 不等式

一 不等式的性质

性质 1 $a > b \Leftrightarrow b < a$;

性质 2 $a > b, b > c$ 那么 $a > c$;

性质 3 $a > b$ 那么 $a+c > b+c$;

性质 4 $a > b, c > 0$ 那么 $ac > bc$; $a > b, c < 0$ 那么 $ac < bc$;

性质 5 $a < b, c < d$ 那么 $a+c < b+d$;

性质 6 $0 < a < b, 0 < c < d$ 那么 $ac < bd$;

性质 7 $a > b > 0$, 那么 $a^n > b^n$. ($n \in \mathbb{N}, n \geq 1$)

性质 8 $a > b > 0$, 那么 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

例 1. $1 < x < 2, 3 < y < 10$, 求 $x-y, \frac{x}{y}$ 的取值范围.

例 2. $\begin{cases} 1 \leq x+y \leq 3 \\ -1 \leq x-y \leq 1 \end{cases}$, 求 $4x+2y$ 的范围.

二 不等式解法

例 1 $ax - e^{-x} > 0$

例 2 $x^2 - kx - 2x + 2k < 0$

例 3 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \geq 0$

例 4 $\frac{2x-1}{x+2} \geq 1$.

三 基本不等式

1. $a^2 + b^2 \geq 2ab$

2. 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ($a > 0, b > 0$), 当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

例 1 求长为 20cm 的铁丝围成矩形面积的最大值.

例 2 求 $x(10-3x)$ 的最值.

例 3 求 $x + \frac{4}{x}$ ($x > 0$) 的最值; 求 $x + \frac{4}{x}$ ($x < 0$) 的最值

例 4. 求 $x + \frac{4}{x+1}$ ($x > -1$) 的最值;

例 5. $a+b=2$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ ($a > 0, b > 0$) 的最值.

例 6. 求下列代数式的最值.

$$(1) \frac{x^2 + 2x + 1}{x} \quad (x > 0) \quad (2) \frac{x}{x^2 + 2x + 1} \quad (x > 0) \quad (3) \frac{2x + 3}{\sqrt{x+1}} \quad (x > -1)$$