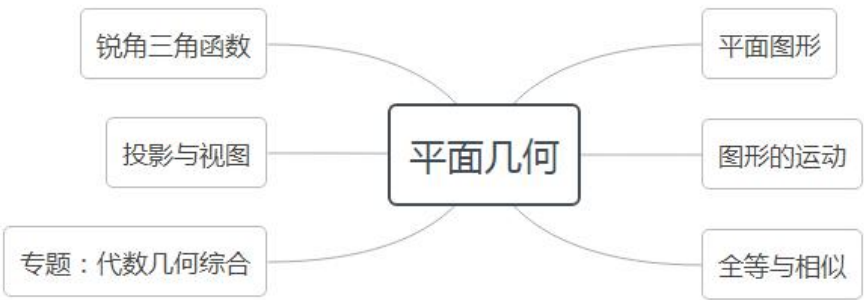


第 2 章 初中几何



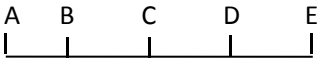
2.1 平面图形

线	直线、射线、线段
角	锐角、直角、钝角、平角、周角
三角形	一般三角形、Rt 三角形、等腰三角形
四边形	平行四边形、矩形、菱形、正方形
多边形	多边形
圆形	圆形、扇形

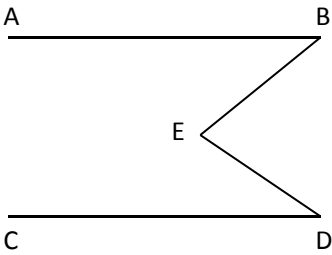
一.线

- 1.直线、射线、线段的定义
- 2.直线的位置关系；
- 3.线段数量关系与位置关系；线段的中点；
- 4.线段的垂直平分线定义和性质（轴对称）；

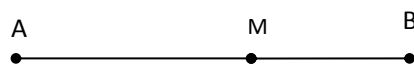
【例 1.1】分类思想的应用：数一数有多少条线段？



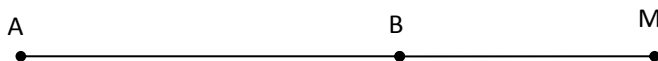
【例 1.2】求 $\angle E$ 、 $\angle B$ 、 $\angle D$ 的数量关系.



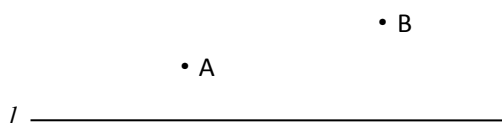
【例 1.3】如图， $AB=8\text{cm}$ ， M 为 AB 上任意点，请你分别画出 AM 、 MB 的中点 P 、 Q 。求 PQ 的长度是否是定值？



【例 1.4】如图，已知 $AB=8\text{cm}$ ， M 为线段 AB 延长线上任意点，请你分别画出 AM 、 MB 的中点 P 、 Q 。求 PQ 的长。



【例 1.5】在下列图中直线 l 上是否存在点 P ，使得 $PA+PB$ 最小。



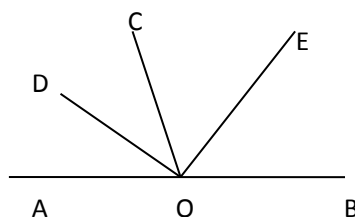
二.角

- 1.角的定义与分类；
- 2.角平分线定义及性质；
- 3.三个定理：对顶角相等；同角的余角相等；同角的补角相等。

【例 2.1】如图， $\angle AOB$ 是一个平角， O 是 AB 上的一个固定的点。射线 OC 在 AB 上方。 OD 是 $\angle AOC$ 的角平分线， OE 是 $\angle BOC$ 的角平分线。

(1)判断 $\angle DOE$ 的大小是否为定值。

(2)找出互余的角。



三、三角形

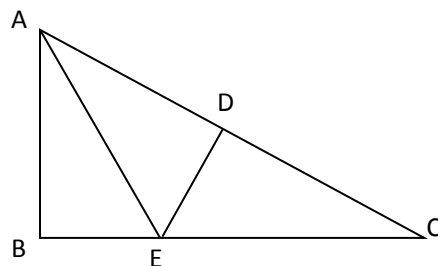
- 1.三角形基础知识：①内角和 180° ，外角和 180° ；
②三条重要的线段及“四心”。

2.直角三角形

- ①直角三角形斜边上的中线是斜边的一半；逆定理。（矩形、圆形中可证明）；
- ②直角三角形中 30° 所对的直角边是斜边的一半；逆定理。
- ③直角三角形中有勾股定理；勾股定理逆定理。

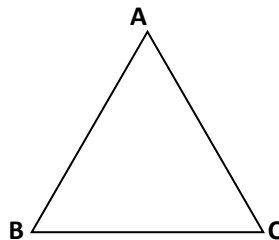
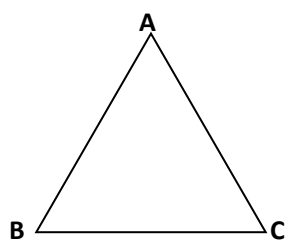
【例 3.1】已知直角三角形两边分别为 3、4，它的周长为_____。

【例 3.2】如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B=90^\circ$ ， $AB=6$ ， $BC=8$ ，将其沿 AE 折叠，使 B 落在 AC 上 D 处，求 BE 的长为_____， $\triangle EDC$ 的面积为_____。



【例 3.3】如图，等边三角形 ABC 边长为 4cm ，点 P 从点 A 出发都向点 B 运动，点 Q 从点 B 出发向点 C 运动，他们的速度都为 2cm/s ，且它们同时出发.设运动时间为 t .

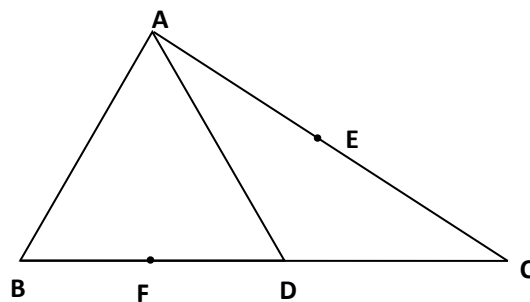
- (1). 是否存在某时间 t ，使得 $\triangle BPQ$ 为直角三角形，若存在求出符合条件的 t 值，不存在请说明理由.
- (2). 连接 AQ 、 CP 相交于 M 点. P 、 Q 在运动过程中， $\angle CMQ$ 的度数是否发生变化？若变化请说明理由，若不变请求出其度数.



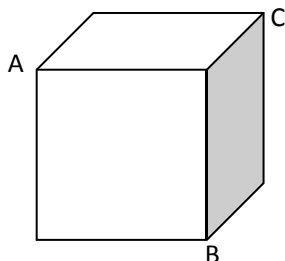
3. 等腰三角形（轴对称）

- ① 等腰三角形定义及三个定理：等边对等角；等角对等边；三线合一.
- ② 等边三角形的判定；
- ③ 轴对称图形
- ④ 分类讨论思想.

【例 3.4】如图， $\triangle ABC$ 中， $AC=6$ ， D 为 BC 上的点，且 $AD=AB$ ， E 、 F 分别为 AC 、 BD 的中点. 则 EF 的长为_____.



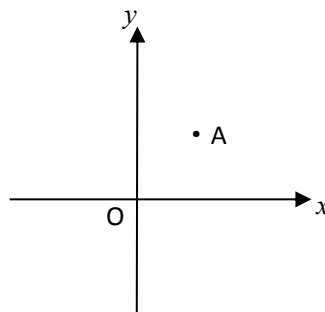
【例题 3.5】如图已知正方体的棱长为 2，则 A、B、C 三点组成的三角形的面积为_____.



【例题 3.6】已知等腰三角形的一边为 2，另外两边长是方程 $x^2+mx+16=0$ 的两根，则这个三角形的周长是（ ）

- A.12 B.10 C.8 D.6

【例题 3.7】如图在直角坐标系中，A (1, 1)，在坐标轴上确定点 P，使得 $\triangle AOP$ 为等腰三角形.



四 .四边形与多边形

1.①四边形的定义，四边形的内角和，外角和；

②多边形内角和，外角和，对角线数目；

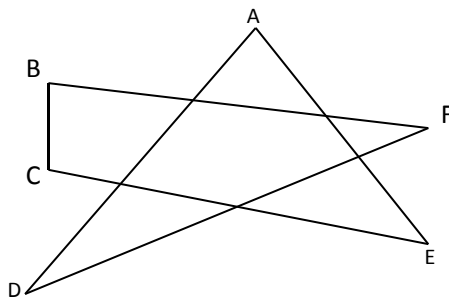
【例 4.1】一个边数大于 3 的多边形，边数减少一边，则它的内角和 （ ）

- A. 增加 180° B.增加 360° C. 减少 180° D.不变.

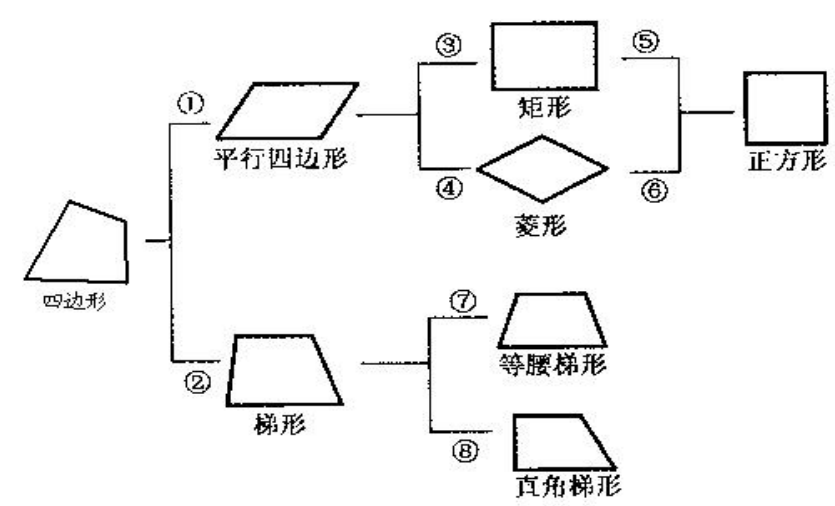
【例 4.2】一个多边形的所有内角中最多可以有 （ ）

- A. 3 个锐角 B.4 个锐角 C.无数个锐角 D.无法确定

【例 4.3】如图，求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F =$ _____.

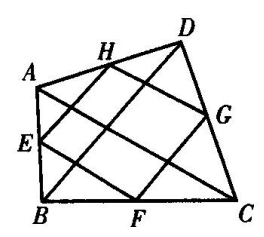


2.特殊的四边形：平行四边形.

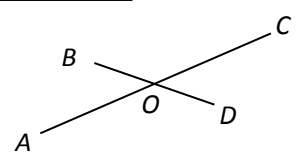


图形	性质（边/角/对角线）	判定
平行四边形		
菱形		
矩形		
正方形		
*梯形		

3 中点四边形



【例 4.4】如图， AC, BD 是相交的两条线段， O 是它们的中点，当 BD 绕点 O 旋转时，连接 $A、B、C、D$ 所得到的四边形 $ABCD$ 始终为_____形。



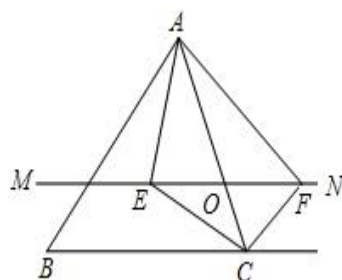
【例题 4.5】以不共线的三点 A 、 B 、 C 为顶点的平行四边形共有_____个。

【例题 4.6】如图， $\triangle ABC$ 中，点 O 为 AC 边上的动点，过点 O 作直线 $MN \parallel BC$ ，设 MN 交 $\angle BCA$ 的外角平分线 CF 于点 F ，交 $\angle ACB$ 内角平分线 CE 于 E 。

i. 试说明 $EO=FO$ ；

ii. 当点 O 运动到何处时，四边形 $AECF$ 是矩形并证明你的结论；

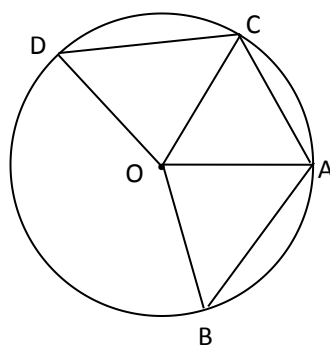
iii. AC 边上存在点 O ，使四边形 $AECF$ 是正方形，猜想 $\triangle ABC$ 的形状并证明你的结论。



五.圆

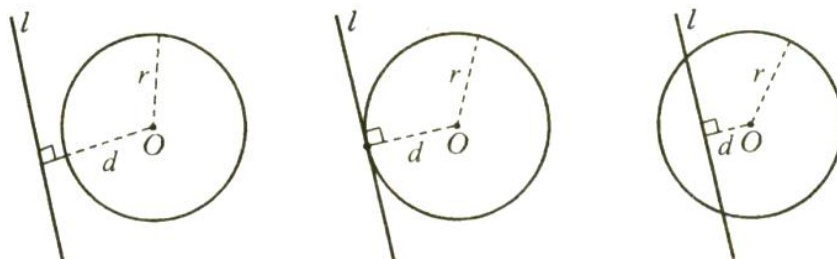
1.与圆相关的概念及性质

- ①圆、半圆、弧、弦、圆心角的概念及之间的关系
- ②圆周角的概念与圆心角的关系
- ③直径所对的圆周角是 90° 及逆定理.
- ④圆的对称性及垂径定理.
- ⑤三角形的外接圆与内切圆.



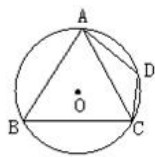
2.与圆的位置关系

- ①点与圆
- ②直线与圆；切线的判定于性质；切线长定理

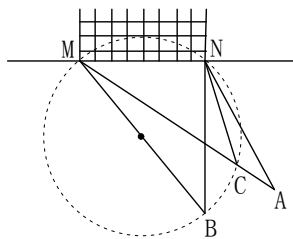


- ③圆与圆（了解）

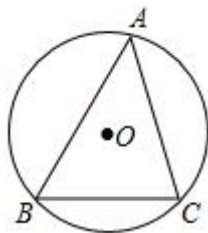
【例 6.1】.一条弦对的两种圆周角的度数和为_____.



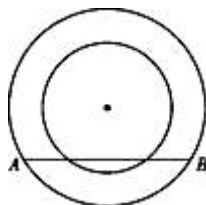
【例 6.2】在足球比赛场上,甲、乙两名队员互相配合向对方球门 MN 进攻.当甲带球到 A 点时,乙随后冲到 B 点,如图所示,此时甲是自己直接射门好,还是迅速将球回传给乙,让乙射门好呢?为什么?(不考虑其他因素)



【例 6.3】如图, $\triangle ABC$ 内接于半径为 5 的 $\odot O$, 圆心 O 到弦 BC 的距离等于 3, 则 $\angle A$ 的正切值=_____.

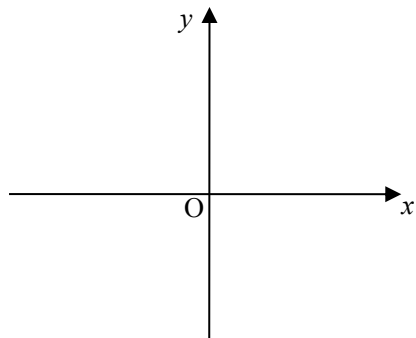


【例 6.4】如图,两个同心圆,大圆的半径为 5 cm,小圆的半径为 3 cm,若大圆的弦 AB 与小圆相交,则弦 AB 的取值范围是_____.

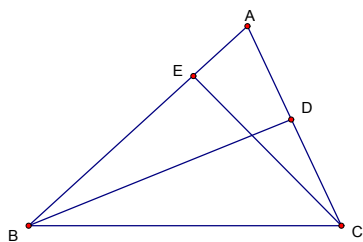


【例 6.5】如图平面直角坐标系中, 点 A $(-4,0)$, 点 B $(4,0)$ 在直线 $l: y = -\frac{1}{2}x$ 上是

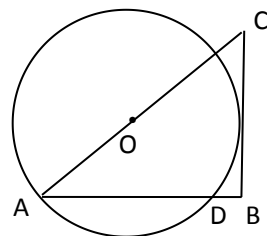
否存在点 P, 使得 $\triangle ABP$ 为直角三角形.若存在请求出所有符合条件的点 P, 若不存在请说明理由.



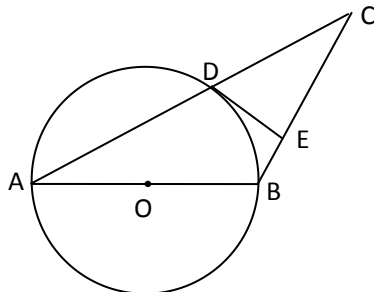
【例 6.6】已知：如图，BD、CE 是 $\triangle ABC$ 的高，试说明点 B、C、D、E 在同一个圆上.



【例 6.7】如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ ， $\angle B=90^\circ$ ， $AB=9\text{cm}$ ，在 AC 上，距 A 点 5cm 处有一点 O，以 O 为圆心 5cm 为半径的 $\odot O$ 与 AB 相交截得弦 AD，且弦心距为 3cm. 求证：BC 是 $\odot O$ 的切线.



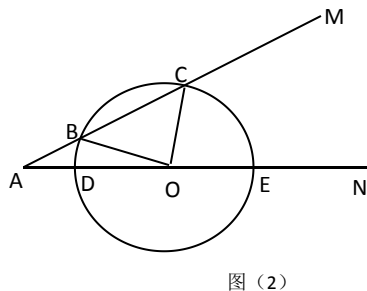
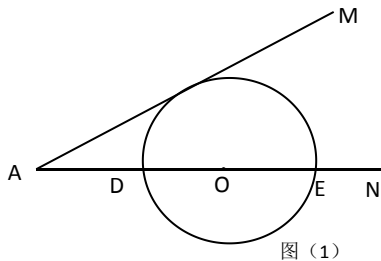
【例 6.8】如图等腰 $\triangle ABC$ 中 $AB=BC$ ，以 AB 为直径的 $\odot O$ 与 AC 交于点 D，过 D 作 $DE \perp BC$ 于 E，求证：直线 DE 是 $\odot O$ 的切线.



【例 6.9】已知： $\angle MAN=30^\circ$ ，O 为边 AN 上一点，以 O 为圆心、2 为半径作 $\odot O$ ，交 AN 于 D、E 两点，设 $AD=x$.

(1) 如图(1)当 x 取何值时， $\odot O$ 与 AM 相切；

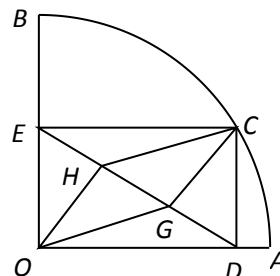
(2) 如图(2)当 x 为何值时， $\odot O$ 与 AM 相交于 B、C 两点，且 $\angle BOC=90^\circ$.



【例 6-10】已知：如图，扇形 OAB 的半径 $OA=3$ ，圆心角 $\angle AOB=90^\circ$ ，点 C 是 \widehat{AB} 上异于 A 、 B 的动点，过点 C 作 $CD \perp OA$ 于点 D ，作 $CE \perp OB$ 于点 E ，联结 DE ，点 G 、 H 在线段 DE 上，且 $DG=GH=HE$ 。

i 求证：四边形 $OGCH$ 是平行四边形；

ii 当点 C 在 \widehat{AB} 上运动时，在 CD 、 CG 、 DG 中，是否存在长度不变的线段？若存在，请求出该线段的长度。



3.与圆的有关计算.

①弧长计算公式

在半径为 R 的圆中， n° 的圆心角所对的弧长 l 的计算公式为：

$$l =$$

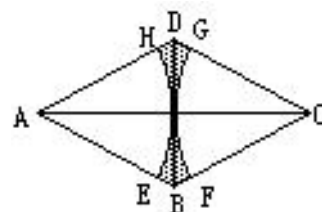
②扇形面积计算公式

在半径为 R 的圆中，圆心角为 n° 的扇形面积的计算公式为：

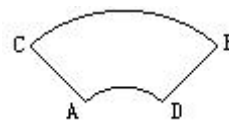
$$S_{\text{扇形}} =$$

③圆锥、圆锥侧面积及体积.

【例 6-11】如图，已知菱形 $ABCD$ 中， AC ， BD 交于 O 点， $AC=2\sqrt{3}$ cm， $BD=2$ cm，分别以 A ， C 为圆心， OA 长为半径作弧，交菱形四边于 E ， F ， G ， H 四点．求阴影部分的面积．



【例 6-12】如图， $ACBD$ 为夹在环形的两条半径之间的一部分，弧 AD 的长为 π cm，弧 CB 的长为 2π cm， $AC=4$ cm，求这个图形的面积．

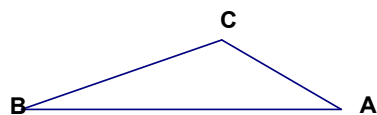


【例 6-13】 已知圆锥的母线长 6 cm；底面半径为 3 cm，求圆锥的侧面积、体积及侧面展开图中扇形的圆心角。

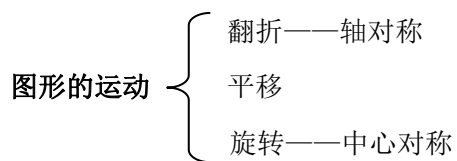
【例 6-14】 $\triangle ABC$ 中， $AB=6\text{cm}$ ， $\angle A=30^\circ$ ， $\angle B=15^\circ$ ，则 $\triangle ABC$ 绕直线 AC 旋转一周所得几何体的表面积为（ ） cm^2 。

A. $(18+9\sqrt{2})\pi$ B. $18+9\sqrt{2}$

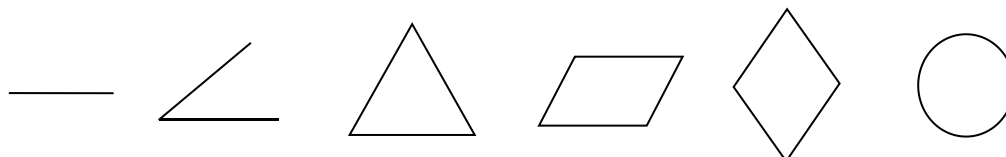
C. $(36+18\sqrt{2})\pi$ D. $36+18\sqrt{2}$



2.2 图形的运动



【例 1】判断下列图形是否是轴对称图形或中心对称图形.



【例 2】找规律画图



【例 3】剪纸是中国的民间艺术，扬州剪纸更是闻名于世。郭沫若曾亲笔题诗：“扬州艺人张永寿，剪出百花齐放来。请看剪下出春秋，顿使东风遍九垓。”如图 3.1-7 所示是一个剪纸的过程，你能按照以下的步骤试着剪一个吗？你知道剪纸艺术的数学原理吗？你能否判断图 3.1-8 中的哪些图可以由剪纸剪出来，哪些不能，并说明理由。

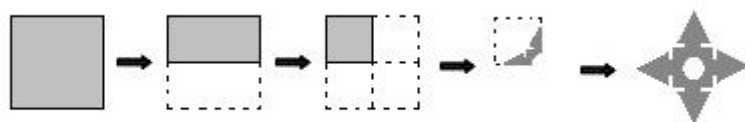


图 3.1-7

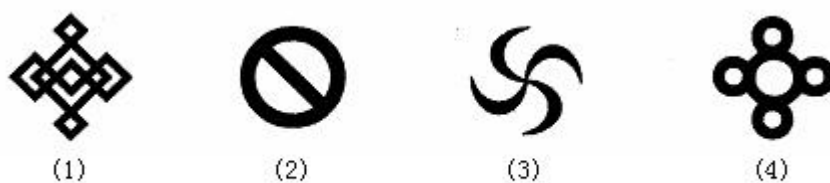
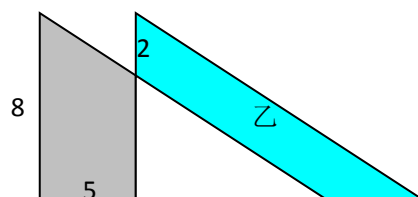


图 3.1-8

【例 4】如图，三角形向右平移一定的距离后与还重叠了一部分.根据图中标的数字求出阴影部分乙的面积.

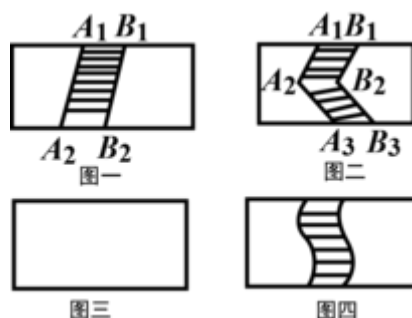


【例 5】如图长方形长宽均为 a 、 b ，在图 1 中，将线段 A_1A_2 向右平移 1 个单位长度到 B_1B_2 ，得 $A_1A_2B_2B_1$ ；在图 2 中将折线 $A_1A_2A_3$ 向右平移 1 个单位到 $B_1B_2B_3$ ，得 $A_1A_2A_3B_3B_2B_1$ 。

(1) 在图 3 中，请你类似设计一个有 2 个折点的线，同样向右平移一个单位，从而得到一个封闭图形。

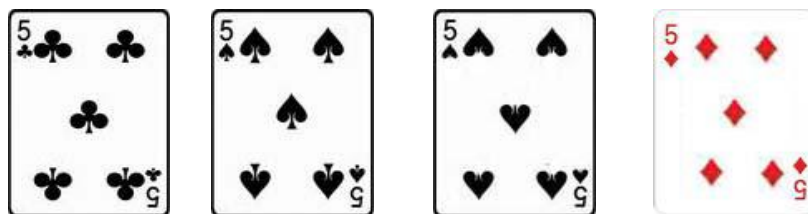
(2) 分别写出一、二、三个图形中除去阴影部分后剩余面积 S_1 ， S_2 ， S_3 。

(3) 如图四，一条弯弯的河流穿过一个长宽分别为 400m、200m 的长方形草地，河流宽度为 80 米。你能算出草地中河流的面积吗？

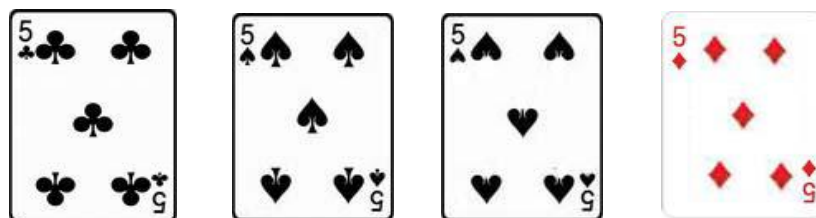


【例 6】如图，小丽和小刚做游戏，小丽放在桌上，小刚悄悄将其中一张旋转 180° ，得到下面的图形，你知道小刚旋转了哪张牌吗？

之前：



旋转一张后：



A

B

C

D

【例 7】如图，将其平均分成面积相等的两个部分



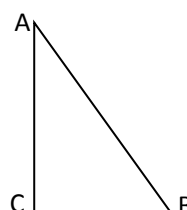
【例 8】 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle B=50^\circ$ ， D 在 BC 边上，且 $BD=2CD$ ，把 $\triangle ABC$ 绕 D 点旋转 m° ($0 < m < 180$) 时，使得 B 恰好落在原 $\triangle ABC$ 的边上，那么 $m=(\quad)$ 。

A.80

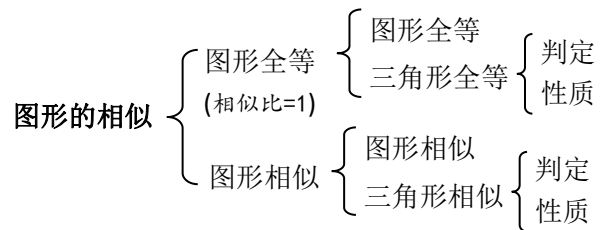
B.80 或 120

C.60 或 120

D.80 或 100.



2.3 图形全等与相似



一.图形全等

1.全等图形的定义

2.三角形全等的判定：AAS、ASA、SAS、SSS、HL (Rt△)

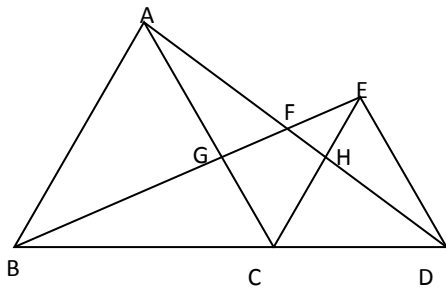
3.全等的性质

【例 1.1】判断下列说法是否正确：

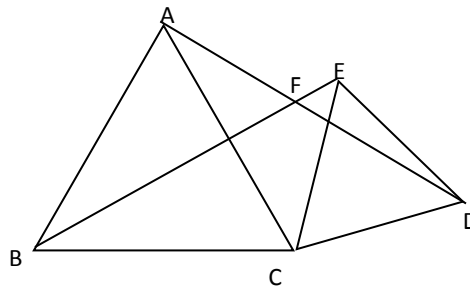
- (1)有两边及其中一边上的高对应相等的两个三角形全等；
- (2)有两边及第三边上的高对应相等的两三角形全等；
- (3)有两边及一边上的中线对应相等的两三角形全等；
- (4)有一边与一个角及这个角的角平分线对应相等的两三角形全等；
- (5)三角形边、角 6 个元素中，有 5 个元素相等的两三角形全等；

【例 1.2】如图， $\triangle ABC$ 与 $\triangle CDE$ 都是等边三角形，AD 和 BE 相交于点 F.

- (1)如图①，点 BCD 共线时，则 AD 和 BE 的大小关系是_____， $\angle AFB$ _____；
- (2)当 $\triangle CDE$ 绕 C 点旋转到如图②位置时，(1)中的结论还成立吗？请说明理由.
- (3)在图①中，连接 GH，判断 $\triangle CGH$ 的形状.



图①



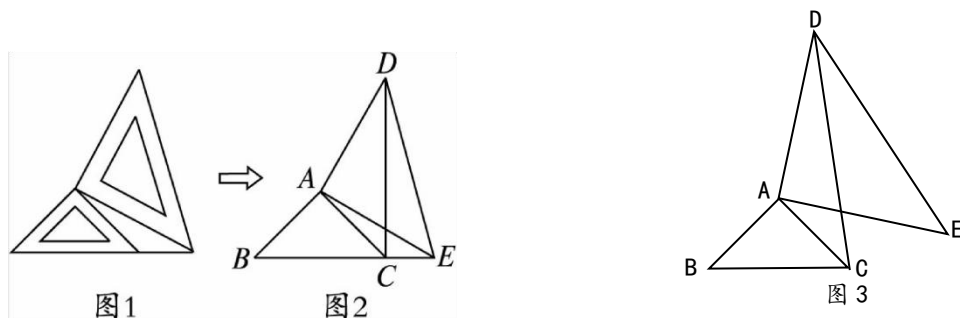
图②

【例 1.3】如图，两个大小不同的等腰直角三角形三角板如图1 所示放置，图2 是由它抽象出的几何 图形， B, C, E 在同一条直线上，连接 DC 、 EC 。

(1)找出图 2 全等的三角形，并给予证明。

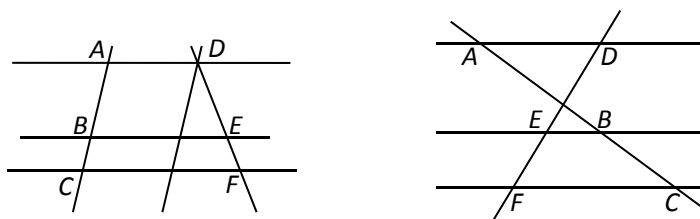
(2)图 2 中判断 DC 与 BE 的关系。

(3)如图 3，当 $B、C、E$ 不在同一条直线上时，以图中给出的点为端点，找出与 DC 相等且垂直的线段。



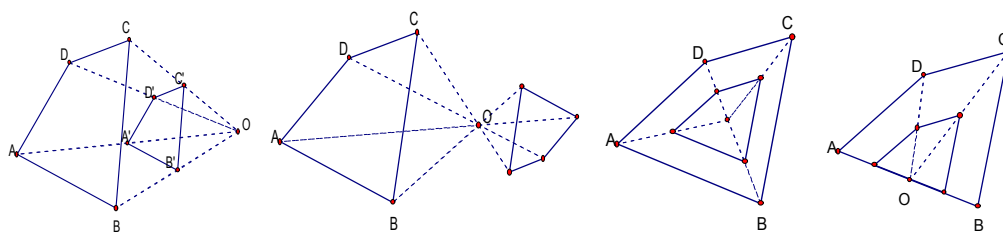
二 .图形相似

1.平行线分线段成比例；比的性质.



2.图形相似与位似的定义；

①位似（特殊的相似）



②相似：直观上，把一个图形放大或缩小得到的图形与原图形是相似图形。

即，形状相同的图形是相似图形。

3.三角形相似的判定:

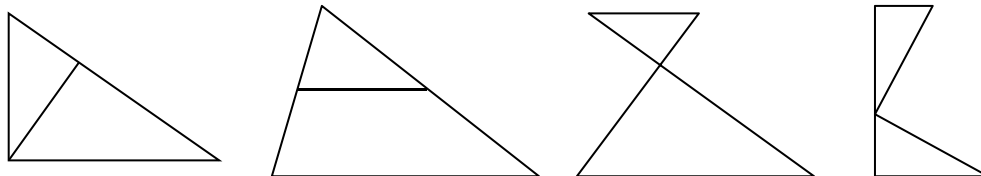
①平行判定; ②两个角相等; ③两边成比例且夹角相等; ④三边对应成比例.

4.相似三角形的性质:

对应边成比例, 对应角相等, 线段及周长比=相似比, 面积比=相似比².

5.三角形相似常见几种模型.

“母子三角形”; “A”字型; “8”字型; “K”型.



【例 2.1】已知 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长, 且 $\frac{a-b}{b} = \frac{b-c}{c} = \frac{c-a}{a}$, 则 $\triangle ABC$

是何种三角形?

【例 2.2】一点 P 把线段 AB 分成两部分, 分别称为较长部分和较短部分, 如果满足

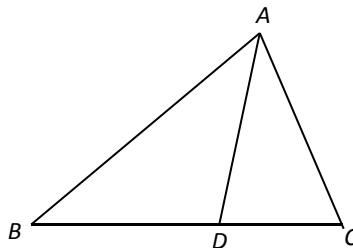
$$\frac{\text{较短部分}}{\text{较长部分}} = \frac{\text{较长部分}}{\text{全长}}$$

(较长部分是较短部分与全长的比例中项)

那么, 称线段 AB 被点 P 黄金分割, 点 P 为线段 AB 的黄金分割点, 其中这个比值叫做黄金比. 求黄金分割比.



【例 2.3】如图, $\triangle ABC$ 中, AD 平分角 BAC , $AB:AC=5:3$, 则 $BD:DC=$ _____.



【例 2.4】判断下列说法正确的是

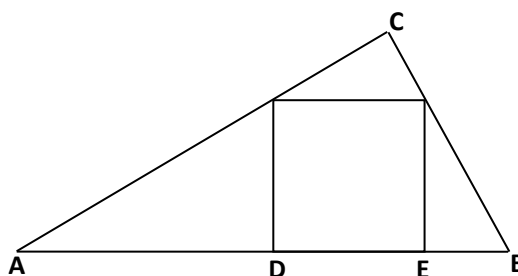
(1) 四条边都对应成比例的两个四边形相似 ()

(2) 四个角都相等的两个四边形相似 ()

(3) 一个长方形(长 \neq 宽)的长和宽都减去 1cm, 所得的新长方形与原长方形相似 ()

(4) 一个长方形的长和宽都变为原来的 $\frac{1}{2}$, 所得的长方形与原长方形相似 ()

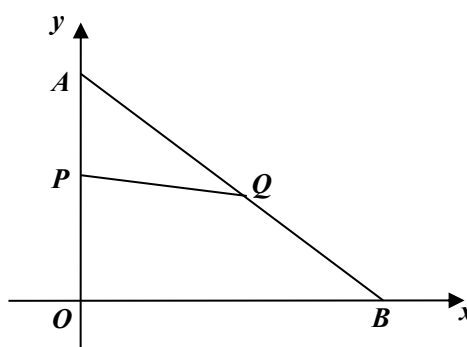
【例 2.5】如图，直角三角形中放一个正方形， $AD=6$ ， $EB=2$ ，求 DE 的长。



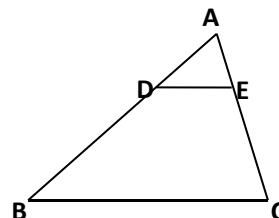
【例 2.6】如图，平面直角坐标系中，已知 $A(0,6)$ ， $B(8,0)$ ，动点 P 从点 A 以每秒 1 个单位长度的速度沿线段 AO 向点 O 移动，同时点 Q 从点 B 以每秒 2 个单位长度的速度沿线段 BA 向点 A 移动。设 P 、 Q 移动时间为 t 秒。

(1) 求直线 AB 的解析式。

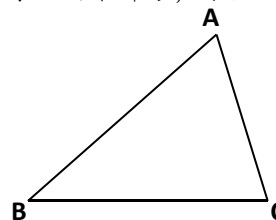
(2) 当 t 为何值时， $\triangle APQ$ 与 $\triangle AOB$ 相似？



【例 2.7】 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ， $AD:DB=1:3$ 。 $\triangle ADE$ 与四边形 $DBCE$ 的面积比为_____。



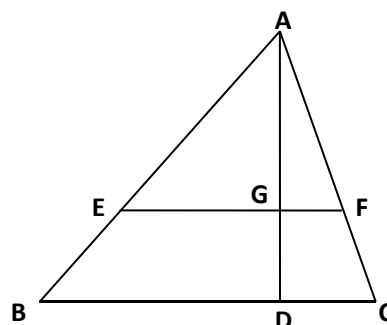
【例 2-8】如图 $\triangle ABC$ 中，用平行于 BC 的直线将其面积分成相等的两个部分，求直线截得 AB 的比例



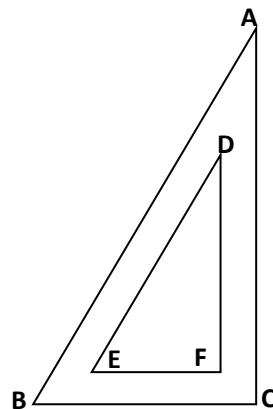
【例 2-9】如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是高， $EF \parallel BC$ ， EF

交 AD 于 G ， $\frac{AG}{GD} = \frac{3}{2}$ 。则 $EF:BC$ 的比值为_____。若

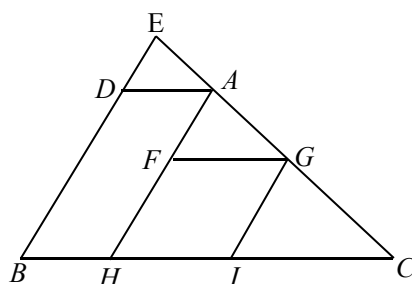
$\triangle AEF$ 的面积为 6，则梯形 $EFCB$ 的面积为_____。



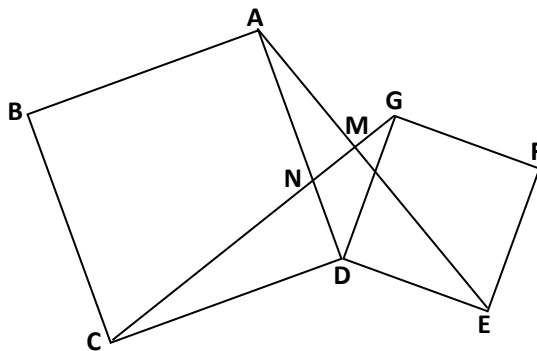
【例 2-10】如图，一个含 30° 角的直角三角形尺，它的斜边 $AB=8\text{cm}$ ，里面空心 $\triangle DEF$ 各边与 $\triangle ABC$ 的对应边平行，且各对应边距离都是 1cm ，那么 $\triangle DEF$ 的周长是_____cm



【例 2-11】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel FG \parallel BC$ ， $GI \parallel EH \parallel AB$. 若 $\triangle ADE$ 、 $\triangle EFG$ 、 $\triangle GIC$ 的面积分别为 20cm^2 ， 45cm^2 ， 80cm^2 ，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

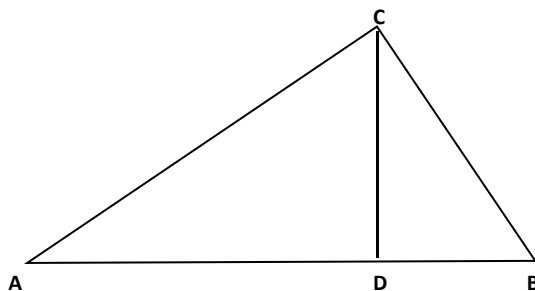


【例 2-12】如图所示，正方形 $ABCD$ 、 $EFGD$ ，连接 AE 、 CG 相交于点 M ， CG 与 AD 相交于点 N . 求证： $AN \cdot DN = CN \cdot MN$.

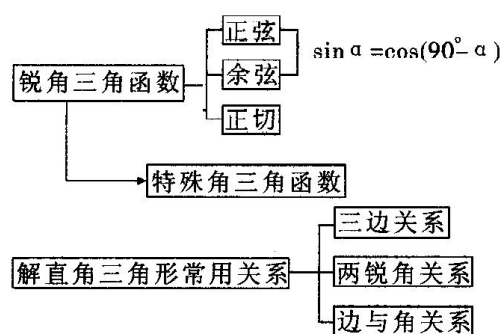


【例 2-13】如图 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， CD 是边 AB 上的高. 求证：

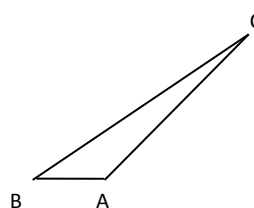
- (1) $CD^2 = AD \cdot DB$;
- (2) $AC^2 = AD \cdot AB$;
- (3) $BC^2 = BD \cdot BA$.



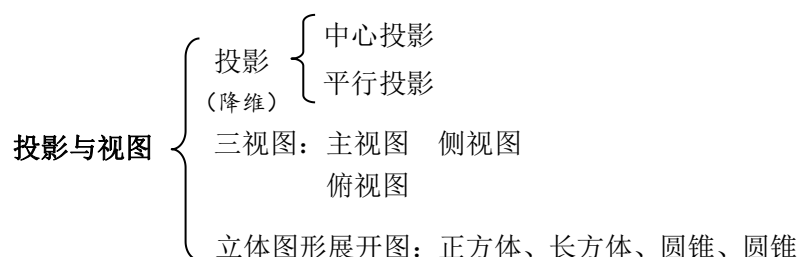
2.4 锐角三角函数



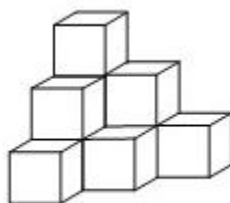
【例 1】如图， $\angle CAB=135^\circ$ ， $\angle B=30^\circ$ ， $AB=3$ ，解这个三角形.



2.5 视图与投影



【例 1】求下列立体图形的表面积（每个小正方体的棱长为 1cm）



【例 2】如图，是用若干个小立方块搭成的几何体的主视图和俯视图，则搭成这个几何体最多需要____个小立方块，最少需要____个小立方块.

