

第7章 解三角形

一 正弦定理

1. 正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

2. 面积公式 $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B$

二 余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

三 模型案例

1. 问题情境: 如图 1 所示, 需要测量河流对岸敌方军营 A 与敌方军营 B 之间的距离, 且 A、B 地点均不可到达。

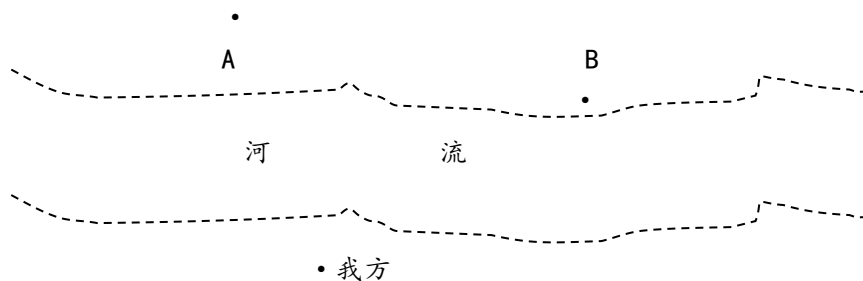


图 1

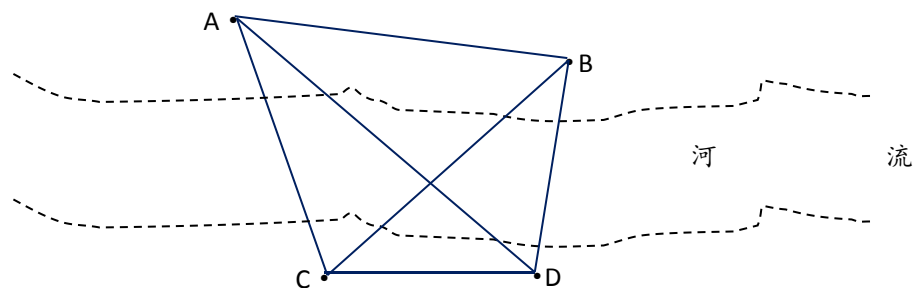
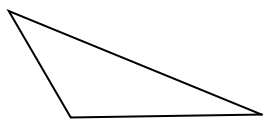


图 2

分析并建立模型如图 2 所示, 即转化为求 AB 距离的问题, 且分析实际问题可知, 仅仅线段 CD 的长度及 $\angle ACB$ 、 $\angle BCD$ 、 $\angle ADC$ 、 $\angle ADB$ 大小可测量。分析解答过程: 在 $\triangle ACD$ 中, 得知 $\angle ACD$ 和 $\angle ADC$ 以及线段 CD, 故利用正弦定理可求 AC; 同理在 $\triangle BCD$ 中, 可求 BC; 然后在 $\triangle ABC$ 中, 利用已经求出来的 AC、BC, 及测量出来的 $\angle ACB$, 运用余弦定理相关知识即可求出 AB 之间的距离。

2. 求任意三角形的面积, 如: 求边长为 2, 3, 4 的三角形的面积。



例 2 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $c=4, b=7$, BC 边上的中线为 $7/2$, 则 $a=$ _____.

- A. 3 B. 4 C. $9/4$ D. 9

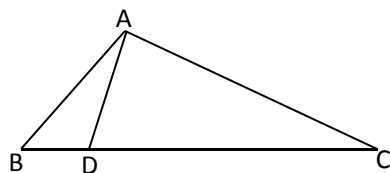
例 2 $\triangle ABC$ 中，三个内角满足 $2A=B+C$, 且最大边与最小边分别是方程 $3x^2-27x+32=0$ 的两根，则 $\triangle ABC$ 的外接圆的面积是_____.

- A. $196\pi/3$ B. $49\pi/3$ C. $147\pi/25$ D. $588\pi/25$

例 3 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 满足 $2B=A+C$, 且 $AB=1, BC=4$, 则 BC 边上的中线 AD 的长为_____.

例 4 如图, $\triangle ABC$ 中, 已知点 D 在 BC 边上, $AD \perp AC$, $\sin \angle BAC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$AB=3\sqrt{2}$, $AD=3$, 则 BD 的长为_____.



例 5 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $C=\pi/2$, 且 A, B, C 所对的边 a, b, c 满足 $a+b=cx$, 则实数 x 的取值范围是_____.

例 6 在 $\triangle ABC$ 中, $B=60^\circ$, $AC=\sqrt{3}$, 则 $AB+2BC$ 的最大值为_____.

例 7 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $2\cos C (a\cos B + b\cos A) = c$.

(1) 求 C ;

(2) 若 $c=\sqrt{7}$, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

例 8 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2a\cos C - c = 2b$.

(1) 求 $\angle A$ 的大小;

(2) 若 $c=\sqrt{2}$, 角 B 的平分线 $BD=\sqrt{3}$, 求 a 的值.

例 9 $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ，已知 $a = b\cos C + c\sin B$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $b=2$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

例 10 $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ，且

$$2a\sin A = (2b+c)\sin B + (2c+b)\sin C.$$

(1) 求 A 的大小;

(2) 已知 $a = \sqrt{3}$ ，求 $b+c$ 的最大值.

例 11. 如图，测量人员沿直线 MNP 的方向测量塔 AB ，测得塔尖 A 处的仰角分别是 $\angle AMB=30^\circ$ ， $\angle ANB=45^\circ$ ， $\angle APB=60^\circ$ ，且 $MN=PN=500\text{m}$ ，求塔高 AB .

