

第二章 函数

一 函数定义及三要素

二 函数的性质

三 函数的零点

四 函数模型的应用

五 基本初等函数：指数函数、对数函数、幂函数、 $x + \frac{1}{x}$ 型函数、三角函数.

一 函数定义及三要素

A、B 是两个非空数集，按照某一确定的对应关系 f ，使集合 A 中的任意一个数 x ，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 与之对应，那么就称对应 $f: A \rightarrow B$ 为集合 A 到 B 的一个函数.

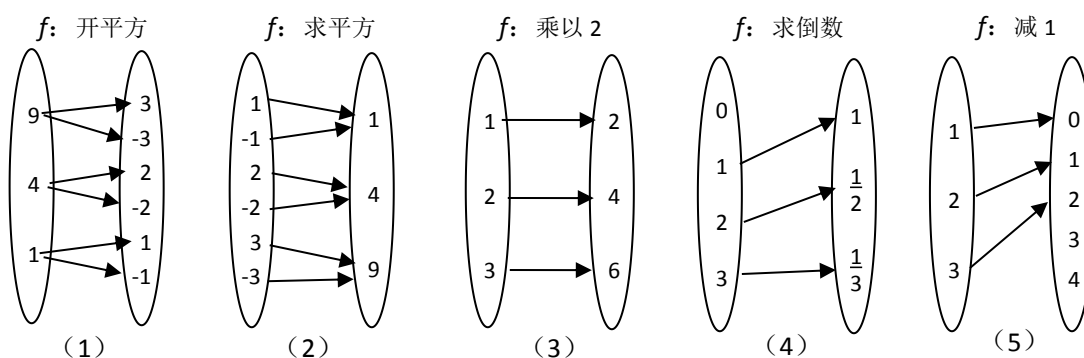
记作： $y = f(x)$ ， $x \in A$.

x 叫做自变量， x 的取值范围叫做定义域， y 值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域. 如果两个函数的三要素（定义域、对应关系、值域）完全相同，那么就称两个函数相等.

二 区间表示集合

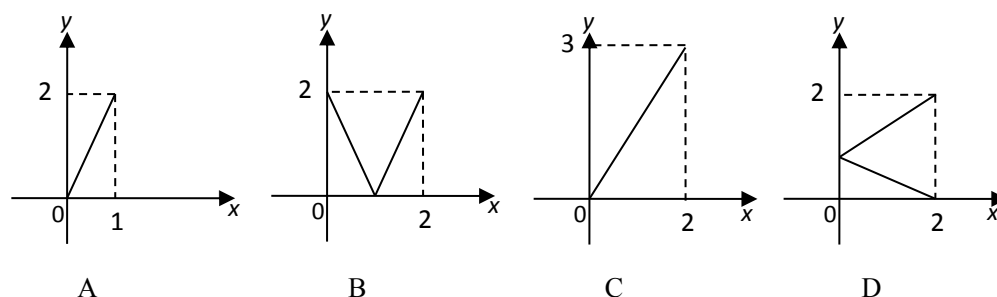
$\{x 1 < x < 5\}$	
$\{x -1 \leq x < 1\}$	
$\{x x > 1 \text{ 或 } x < 0\}$	
$\{x x \neq 2\}$	

例 1. 由函数的定义判断下列对应是否为函数：



例 2、设 $M = \{x|0 \leq x \leq 2\}$ ， $N = \{y|0 \leq y \leq 2\}$ ，给出下列四个图形，其中能表示从几何 M 到集合 N 的函数关系式的是

()



例 3. 下列各组式子是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x) = x - 1$, $g(x) = \frac{x^2}{x} - 1$ (2) $f(x) = x^2$, $g(x) = (\sqrt{x})^4$;

(3) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt[3]{x^6}$ (4) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, $f(a) = 2a^2 + 3a - 1$.

例 4 求下列函数的定义域.

(1) $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + 1}$; (2) $y = \frac{(x+1)^0}{\sqrt{x+2}}$

(3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 3]$, 函数 $f(2x+1)$ 的定义域为_____;

(4) 已知函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $[1, 3]$, 函数 $f(x)$ 的定义域为_____.

(5) 已知集合 $A = \{x | x \geq 4\}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+a-x}}$ 的定义域为 B , 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 a 的取值范围是_____.

例 5 求下列函数的值域.

(1) $y = x + \sqrt{x+1}$ (2) $y = 2 + \frac{1}{x}$ (3) $y = x^2 - 4x + 1$, $x \in [1, 5]$
(4) $y = \frac{2x+1}{x}$ (5) $y = \frac{2x+1}{x-3}$
(6) $y = 2x - \sqrt{x-1}$ (7) $y = 2x + \sqrt{1-2x}$

例 6 求下列函数的解析式.

(1) 已知 $f(x)$ 是一次函数, 且 $f(f(x)) = 4x + 3$, 求 $f(x)$ 的解析式.

(2) 已知 $f(x+1) = \frac{x^2 + 2x}{x+1}$ ($x > 0$), 求 $f(x)$ 的解析式.

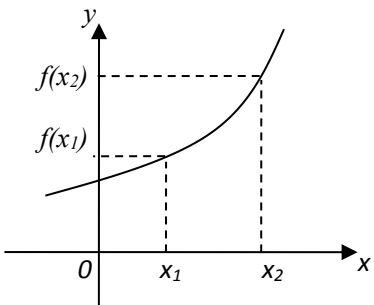
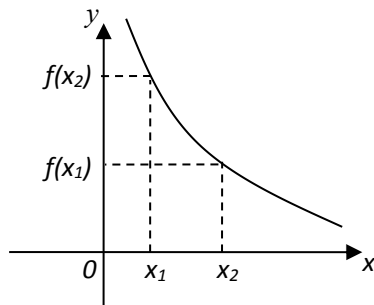
(3) 定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = 2f(x)$. 若当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) = x(1-x)$, 则当 $-1 \leq x < 0$ 时, $f(x)$ _____.

(4) 有 $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x + 2$. 求 $f(x)$.

例 7. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 4^{-x}, & x \in [-2, 0] \\ 4^x, & x \in (0, 2] \end{cases}$, 则 $f(f(-\frac{1}{2})) =$ _____.

二 函数的性质

1.函数的单调性

$f(x)$ 在区间 D 上增函数	$f(x)$ 在区间 D 上是减函数
区间 D 上任意 x_1, x_2 . $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$	区间 D 上任意 x_1, x_2 . $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$
$f(x_2) - f(x_1)$ 与 $x_2 - x_1$ 符号_____	$f(x_2) - f(x_1)$ 与 $x_2 - x_1$ 符号_____
	

例 1 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 A, 如果对于定义域内某个区间 I 上的任意两个不同的自变量 x_1, x_2 , 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 则 ()

- A. $f(x)$ 在定义域 A 内为增函数
B. $f(x)$ 在区间 I 上为增函数
C. $f(x)$ 在区间 I 上的增减性不能确定.
D. $f(x)$ 在区间 I 上为减函数.

例 2(1)求函数 $y = \frac{1}{1-2x}$ 的单调区间.

(2)求函数 $y = \frac{2x-1}{x+1}$ 的单调区间, 并求其在 $[1, 3]$ 上的最小值.

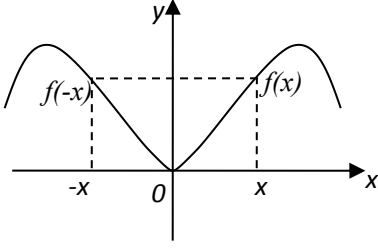
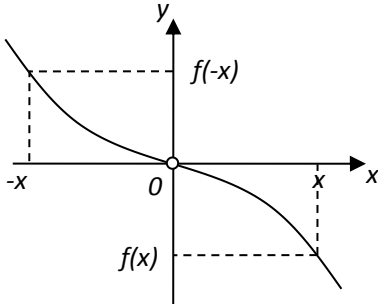
例 3 (1) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax - 3$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调, 求实数 a 的取值范围.

(2)若函数 $f(x) = x^2 + 2(a-1)x + 2$ 在 $(-\infty, 4]$ 上单调递减, 求实数 a 的取值范围.

例 4 已知 $y = f(x)$ 在定义域 $(-1, 1)$ 上是减函数, 且 $f(1-a) < f(2a-1)$, 求 a 的取值范围.

例 5 $f(x) = \begin{cases} -x+a, & x > 0 \\ x^2+1, & x \leq 0 \end{cases}$ 在定义域内单调, 则 a 的取值范围是_____.

2. 奇偶性

	定义	图像特征	代表图像	代表函数
偶函数	定义域内的 x $f(-x) = f(x)$	定义域关于____对称 图像关于____对称 (____对称) y轴为____ 两个对称的区间单调性____		特殊的二次函数: $y = ax^2 + c$ ($a \neq 0$) 分段函数 $y = x $. 直线 $y = 0$
奇函数	定义域内的 x $f(-x) = -f(x)$	定义域关于____对称 图像关于____对称 (____对称) 原点为____ 两个对称区间单调性____ 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$		正比例函数: $y = kx$ 反比例函数 $y = kx^{-1}$ 三次函数 $y = x^3$ 直线 $y = 0$

注: 上表中, $f(x)$ 与 $f(-x)$ 中的 x 与 $-x$ 本质是指两个互为相反数的自变量。

若 $a+b=0$, 且 $f(a) = f(b)$, 则函数 $f(x)$ 为____函数;

若 $a+b=0$, 且 $f(a) = -f(b)$, 则 $f(x)$ 为____函数.

例 1. 判断下列函数的奇偶性.

- (1) $f(x) = x^5 + x^3 + x$ () (2) $f(x) = x^4 + x^2 + x^0$ ()
 (3) $f(x) = x^2 + 1$ () (4) $f(x) = x^2 + x$ ()
 (5) $f(x) = x^2, x \in (-1, 3)$ () (6) $f(x) = (x-1)^2$ ()

例 2、已知 $f(x) = 3x^3 + 4bx + 3a + b, x \in [2a-6, a]$ 是奇函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 3、已知 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数, 给出下表:

x	1	2	3
$f(x)$	2	1	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则 $f[g(1)] = \underline{\hspace{2cm}}$; $g[f(-1)] = \underline{\hspace{2cm}}$; $g[-f(2)] = \underline{\hspace{2cm}}$; $f[g(-3)] = \underline{\hspace{2cm}}$;

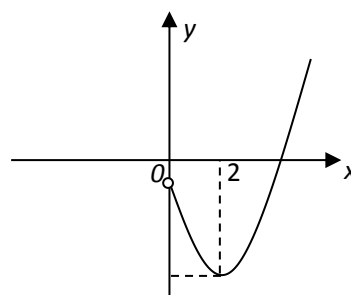
例 4、已知函数 $y = f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的偶函数, 且在 $(-\infty, 0]$ 上为增函数, 若 $f(a) \leq f(2)$, a 的取值范围是 ()

- A. $a \leq 2$ B. $a \geq -2$ C. $-2 \leq a \leq 2$ D. $a \leq -2$ 或 $a \geq 2$

例 5 函数 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - bx - 1$.

(1) 补全 $f(x)$ 的图像;

(2) 求 $f(x)$ 完整表达式.



二 基本初等函数

1. 指数及指数函数

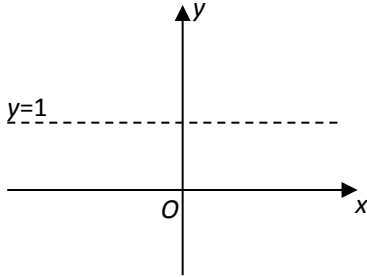
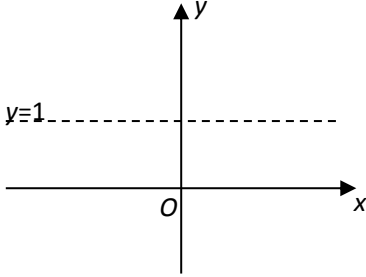
$$(1) a > 0, \quad \sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{a^{-3}}} \cdot \sqrt{(a^{-5})^{\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}})^{13}} =$$

$$a > 0, \quad \left(\sqrt[3]{\sqrt{6} a^9} \right)^4 \left(\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^9}} \right)^4 =$$

(2) 指出下列哪些是指数函数.

① $y = 4^x$ ② $y = x^4$ ③ $y = -4^x$ ④ $y = (-4)^x$ ⑤ $y = 4^{-x}$

(3) 指数函数的性质 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

指数函数	$0 < a < 1$	$a > 1$
图像		
定义域		
值域		

例 1、函数 $y = \sqrt{16 - 4^x}$ 的定义域为_____，值域是_____.

例 2、已知 $a = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$, $b = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$, $c = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$, 比较 a 、 b 、 c 的大小_____.

例 3. 画出 $y = |2^x - 2|$ 和 $y = 2^{|x|}$ 的图像.

例 4. $y = 3^{x^2 - 2x}$ 单调增区间是_____, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 - 2x}$ 的单调增区间是_____.

例 5. 若关于 x 的方程 $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3a+2}{5-a}$ 有负根, a 的取值范围是_____.

2. 对数及对数函数.

(1) 对数运算

对数性质：负数和 0 没有对数；1 的对数是_____；底数的对数是_____； $a^{\log_a M} = \underline{\hspace{2cm}}$.

运算性质

$$\textcircled{1} \log_a M + \log_a N = \underline{\hspace{2cm}}. \text{对数加法运算。} \quad \log_a M \cdot N =$$

$$\textcircled{2} \log_a M - \log_a N = \underline{\hspace{2cm}}. \text{对数减法运算。} \quad \log_a \frac{M}{N} =$$

$$\textcircled{3} n \log_a M = \quad \log_a M + \log_a M =$$

换底公式（把底数不同、不能运算的对数式转化为相同底数相同、可运算的对数式）

$$\log_a b =$$

$$\text{常用结论：} \log_{a^n} b^m = \quad \log_b a \cdot \log_a b =$$

例 1 求下列各式中 x 的取值范围

$$(1) \log_2(10-x)$$

$$(2) \log_{(x-1)}(x+2)$$

例 2 计算

$$\lg \sqrt{2} + \lg \sqrt{5}$$

$$2 \ln e - \ln \sqrt{e}$$

$$\log_2(2^3 \times 4^5)$$

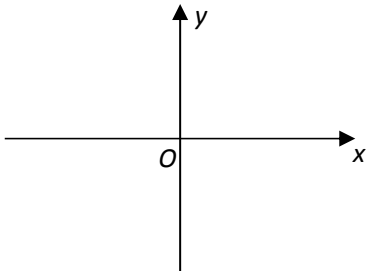
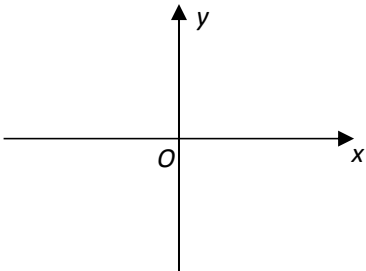
$$4 \lg 2 + 3 \lg 5 - \lg \frac{1}{5}$$

$$2 \log_3 2 - \log_3 \frac{32}{9} + \log_3 8 - 5^{\log_5 3}$$

例 3 已知 $3^x = 4^y = 36$ ， $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 的值为_____.

$$\text{例 4 } f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & (x \geq 4) \\ f(x+1), & (x < 4) \end{cases}, \text{ 则 } f(2 + \log_2 3) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 对数函数 $y = \log_a x$ （其中 a 是常数，且 _____，）

对数函数	$y = \log_a x \quad (0 < a < 1)$	$y = \log_a x \quad (a > 1)$
图像		
性质		

例1 函数 $f(x) = \log_a(x-2) - 1$ 图像恒过定点_____.

例2 比较大小

(1) $\log_{0.3} 2.7$ 和 $\log_{0.3} 2.8$ (2) $\log_2 0.3$ 和 $\log_2 0.7$ (3) $\log_2 3, \log_4 3, \log_5 0.5$

例3 反函数的概念: ①反函数关于直线 $y=x$ 对称, ② $y=f(x)$ 上的点 (a, b) , 则 (b, a) 必在反函数图像上. 求出下列函数的反函数:

(1) $y = x^{10}$

(2) $y = 10^x$

(3) $y = \log_7 x$

例3 求下列函数定义域

(1) $y = \frac{1}{\lg(x+1) - 3}$

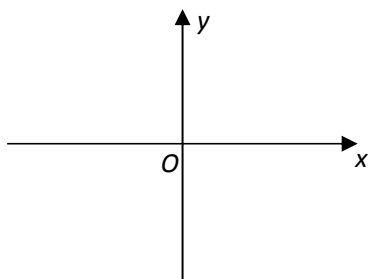
(2) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(4x-3)}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

例4 (1) 若 $\log_a \frac{1}{2} > 1$, 则 a 的取值范围是_____.

(2) 已知 $\log_{0.7} 2x < \log_{0.7}(x-1)$, 则 x 的取值范围是_____.

3. 幂函数

(1) 画出幂函数 $y = x^a$ 图像, 其中 ($a=3, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -1, -2$)

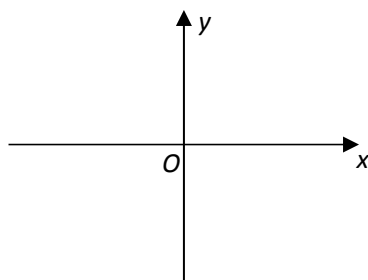


例1 比较大小

$0.2^{-0.3} \bigcirc 0.2^{-0.4}$

$0.3^{0.2} \bigcirc 0.4^{0.2}$

4. $x + \frac{1}{x}$ 型函数.



三 函数的零点及二分法求零点

1. 零点存在性定理：如果函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图像是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，那么 $f(x)$ 在区间 (a, b) 有零点.即存在 $x_0 \in (a, b)$ ，使得 $f(x_0)=0$.这个 x_0 叫做 $f(x)$ 的零点.

2.二分法求零点.

例 1.求 $f(x)=\ln x+2x-6$ 的零点个数及零点（精确度 0.5）.

例 2. 用二分法求方程 $f(x)=0$ 在区间 $(1,2)$ 内的唯一实数解 x_0 时，经计算得 $f(1)=2^{0.5}$,

$f(2)=-5, f(\frac{3}{2})=2$, 则下列结论正确的是()

A. $x_0 \in (1, \frac{3}{2})$

B. $x_0 = \frac{3}{2}$

C. $x_0 \in (\frac{3}{2}, 2)$

D. $x_0 \in (1, \frac{3}{2})$ 或 $x_0 \in (\frac{3}{2}, 2)$

例 3.若 $f(x) = |4x-x^2| - a$ 的零点个数为 3 个，则 $a =$ _____.

四 函数模型应用

例 1、一种放射性元素，最初的质量为 500g，按每年 20%衰减.

(1)求 $t(t \in \mathbb{N}_+)$ 年后，这种放射性元素的质量 y 与 t 的函数关系式；

(2)求这种放射性元素的半衰期（半衰期指质量变为原来的 $\frac{1}{2}$ 时所经历的时间，

$\lg 2 \approx 0.3$.)

五 综合应用

例 1. 已知函数 $f(x) = \frac{ax+b}{1+x^2}$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 证明 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数;
- (3) 解不等式 $f(t-1) + f(t) < 0$.

例 2. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x) = \frac{-2^x + b}{2^x + a}$ 是奇函数.

- (1) 求 a 、 b 的值;
- (2) 若对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(t^2-2t) + f(2t^2-k) < 0$ 恒成立, 求 k 的取值范围.