

第 10 章 数列

【知识导图】

一 数列

1. $\{a_n\}$ a_n S_n

2. 递推公式 通项公式

3. S_n 与 a_n 的关系

4. 数列的分类：有穷数列；无穷数列；递增数列；递减数列；常数列；摆动数列等等.

二 两种常见的数列

1. 等差数列

定义：

通项公式：

求和公式：

等差中项的概念：

2. 等比数列

定义：

通项公式：

求和公式：

等比中项的概念：

例 1 已知函数 $f(x)$ 的对应关系如下表所示，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$ ， $a_{n+1}=f(a_n)$ ，则 $a_4=$ _____. $a_{2020}=$ _____.

x	1	2	3
$f(x)$	3	2	1

例 2 已知数列 $\{a_n\}$ ， $a_{n+1}-a_n=n$ ，且 $a_1=1$ ，则 $a_{10}=$ _____.

例 3. 已知数列 $\{a_n\}$ ， $a_1=1$ ， $a_n = \frac{n+1}{n-1} a_{n-1}$ ，则 $a_{10}=$ _____.

例 4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=4$ ， $a_n = 4 - \frac{4}{a_{n-1}}$ ，记 $b_n = \frac{1}{a_n - 2}$ ，

求证 $\{b_n\}$ 是等差数列.

例 5. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_5 < S_6 = S_7 > S_8$, 则下列结论错误的是:

- A. $d < 0$ B. $a_7 = 0$ C. $S_9 > S_5$ D. $S_6 = S_7$ 均为 S_n 的最大值.

例 6. (1) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 前 9 项的和为 27, $a_{10} = 8$, 则 $a_{100} =$ _____.

- (A) 100 (B) 99 (C) 98 (D) 97

(2) 两个等差数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 、 T_n , 且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+2}{n+3}$, 则

$$\frac{a_5}{b_5} = \text{_____}.$$

例 7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $\frac{S_6}{S_3} = 9, a_9 = 8$, 则 $a_{12} =$ _____.

例 8. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c .

(1) 若 b 是 a, c 的等差中项, 证明: $\sin A + \sin C = 2\sin(A+C)$;

(2) 若 b 是 a, c 的等比中项, 求 $\cos B$ 的最小值.

例 9. 数列求和

(1) 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 2^n - 1$, 求

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2.$$

(2) 若 $x \neq 0$, 数列 $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$ 的前 n 项和 $S_n =$ _____.

(3)求数列 9, 99, 999,, 999...99, 的前 n 项和.

(4) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, 它的前 n 项和 $S_n=9$, 则 $n=$ _____.

A. 9

B.10

C. 99

D.100

求 $\frac{1}{n(n+1)}$ 的前 n 项和 S_n .

求 $\frac{1}{n^2 + 4n + 3}$ 的前 n 项和 S_n .

求 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的前 n 项和 S_n .

求 $\frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)}$ 的前 n 项和 S_n .

(5)求 $\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \dots, \frac{n}{2^n}$ 的前 n 项和 S_n .

例 10 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\dots+(2n-1)a_n=2n$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(II) 求证数列 $\left\{\frac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和小于 1.

三.数列与不等式

1 放缩基本思想

(1).四舍五入;

(2)非等价转化得到不等关系.

2..高中阶段常见放缩形式

(1).类比分式的基本性质放缩

$$\textcircled{1} \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} ; \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)(n+1)} ;$$

$$\textcircled{2} \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} ;$$

$$\textcircled{3} \frac{2-1}{3-1} < \frac{2}{3} < \frac{2+1}{3+1} ; \quad \frac{3+1}{2+1} < \frac{3}{2} < \frac{3-1}{2-1} ;$$

(2).利用均值不等式放缩

(3)利用函数模型放缩

四 数列与函数

例 11 (放缩法证明不等式)

(1).求证: $\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1} < 1$.

(2)求证: $n! \leq \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$

(3) 求证: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$ (调和数列)

例 12 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n+1$.

(I) 证明 $\left\{a_n + \frac{1}{2}\right\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 证明: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$.

例 13 (1) 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, 点 (a_{n-1}, a_n) ($n>1$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$) 满足 $y=2x-1$, 则

$a_1+a_2+a_3+\dots+a_{10}=\underline{\hspace{2cm}}$.

答案: 1033

(2) .已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x-10, & x \leq 7 \\ \frac{1}{f(x-2)}, & x > 7 \end{cases}$, 若 $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 50

项和等于_____.

答案: 225/4