

## 第 11 章 解析几何

### 一 曲线与方程的概念

#### 1. 曲线与方程的定义:

直角坐标系中, 如果曲线  $C$  上的点与二元一次方程  $f(x, y) = 0$  的实数的解建立如下关系: ① 曲线上点的坐标都是这个方程的解.

② 以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点.

那么, 这个方程叫做曲线的方程; 这条曲线叫做方程的曲线。

2. 坐标法: 借助坐标系, 用坐标上的点, 把曲线看成点的集合或点的轨迹, 用曲线上点的坐标  $(x, y)$  所满足的方程来表示曲线, 通过研究方程的性质间接地来研究曲线的性质, 这就叫做坐标法。

用坐标法研究集合图像形成的学科叫做解析几何,

其研究主要问题  $\begin{cases} \text{根据条件, 求出表示曲线的方程} \\ \text{通过曲线的方程, 研究曲线的性质} \end{cases}$

### 二 曲线方程求法

已知曲线类型: 设标准方程  $\rightarrow$  待定系数法求解

未知曲线类型:

动点变化轨迹  $\begin{cases} \text{几何条件} \begin{cases} \text{符合某种曲线定义} \rightarrow \text{定义法} \\ \text{不符合定义} \rightarrow \text{直接法: 设点、列式、化简、证明} \end{cases} \\ \text{原因} \begin{cases} \text{依赖于某点} \rightarrow \text{相关点法} \\ \text{依赖于某个变量} \rightarrow \text{参数法} \end{cases} \end{cases}$

### 三 高中阶段几种曲线方程

#### 1. 几种曲线方程定义

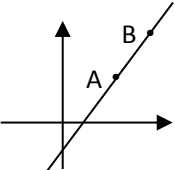
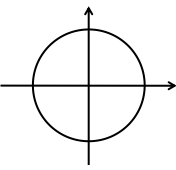
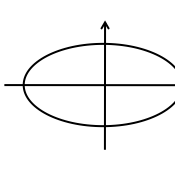
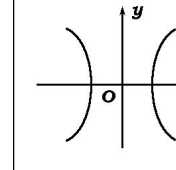
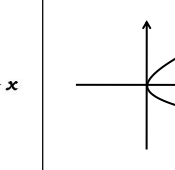
$\{P \mid PO = r, O \text{ 为定点}, r > 0 \text{ 且为定值}\} \rightarrow \text{圆}$

$\{P \mid PF_1 + PF_2 = 2a, a > 0 \text{ 且为定值}\} \begin{cases} 2a > F_1F_2 \rightarrow \text{椭圆} \\ 2a = F_1F_2 \rightarrow \text{线段} \\ 2a < F_1F_2 \rightarrow \text{不存在} \end{cases}$

$\{P \mid |PF_1 - PF_2| = 2a, a > 0 \text{ 且为定值}\} \begin{cases} 2a < F_1F_2 \rightarrow \text{双曲线} \\ 2a = F_1F_2 \rightarrow \text{两条射线} \\ 2a > F_1F_2 \rightarrow \text{不存在} \\ 2a = 0 \rightarrow \text{垂直平分线} \end{cases}$

$\{P \mid PF = P \text{ 到 } l \text{ 的距离}, F \text{ 为定点且 } F \notin l, l \text{ 为定直线}\} \rightarrow \text{抛物线}$

## 2.高中阶段所学曲线

方程	直线方程	圆	椭圆	双曲线	抛物线
定义					
方程式					
代表图像					
性质	倾斜角、斜率 平行、垂直 交点坐标 距离公式	点与圆 线与圆 弦长	$x$ 、 $y$ 范围 对称性 轴及关系 离心率	$x$ 、 $y$ 范围 渐近线 轴及关系 离心率	焦点坐标 准线方程 焦点弦 离心率

### 例题讲解

#### 一 直线与圆

例 1 过点  $P(-1, -1)$  向圆  $x^2 + y^2 = 2$  引切线，切线方程为\_\_\_\_\_.

例 2  $P$  是圆  $C: (x+1)^2 + (y+3)^2 = 1$  上一动点， $O$  为原点，

(1)  $PO$  的最小值为\_\_\_\_\_，最大值为\_\_\_\_\_.

(2) 已知直线  $l: y=x$ ，则  $P$  到  $l$  的距离的最大值为\_\_\_\_\_，最小值为\_\_\_\_\_.

例 3 从动点  $P(a, 2)$  向圆  $C: (x+3)^2 + (y+3)^2 = 1$  作切线，则切线长的最小值为( )

A. 4    B.  $2\sqrt{6}$     C. 5    D.  $\sqrt{26}$

[答案] B

#### 二 椭圆

例 1. 椭圆有这样的光学性质：从椭圆的一个焦点出发的光线，经椭圆反射后，反射光线必定经过椭圆的另一个焦点。今有一个水平放置的椭圆形台球桌，点  $A$ 、 $B$  是它的焦点，长轴长为  $2a$ ，焦距为  $2c$ ，静放在点  $A$  的小球（小球的半径不计），从点  $A$  沿直线出发，经椭圆壁反弹后第一次回到点  $A$  时，小球经过的路程是( )

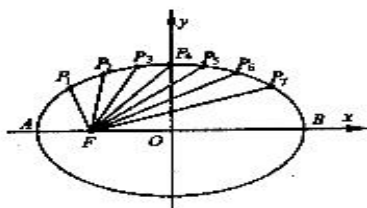
A.  $4a$     B.  $2(a-c)$     C.  $2(a+c)$     D. 以上均有可能

答案：D

例 2. 如图，把椭圆  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  的长轴  $AB$  分成 8 等份，过每个分点作  $x$  轴的垂线交椭圆

圆的上半部分于  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$  七个点， $F$  是椭圆的一个焦点

则  $|P_1F| + |P_2F| + |P_3F| + |P_4F| + |P_5F| + |P_6F| + |P_7F| =$ \_\_\_\_\_.



答案：35

### 三 双曲线

例 1.  $\triangle ABC$  中,  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $B(-1, 0), C(1, 0)$ , 求满足  $\sin C - \sin B = \frac{1}{2} \sin A$  时, 则  $A$  的轨迹方程是\_\_\_\_\_.

解:  $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1 \quad (x > \frac{1}{2})$

例 2. 设  $F_1, F_2$  是双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$  的左右焦点, 点  $P$  在双曲线上, 若点  $P$  到焦点  $F_1$  的距离等于 9, 则点  $P$  到焦点  $F_2$  的距离\_\_\_\_\_.

例 3. 已知  $F$  是双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$  的左焦点,  $A(1, 4)$ , 是  $P$  是双曲线右支上的动点, 则  $|PF| + |PA|$  的最小值为\_\_\_\_\_.

### 三 抛物线

例 1. 已知曲线  $C_1$  上任意点  $N$  到  $F(1, 0)$  的距离比到  $y$  轴的距离大 1; 求  $C_1$  的方程.

例 2. 曲线  $C_2$  上任意点  $M$  到直线  $l: x=4$  的距离是它到点  $F(1, 0)$  的距离的 2 倍, 则  $C_2$  的方程是\_\_\_\_\_.

例 3. 设  $P$  是抛物线  $y^2=4x$  上一个动点,  $F$  是该抛物线的焦点.

(1) 点  $P$  到定点  $A(-1, 1)$  距离与到直线  $x=-1$  的距离之和的最小值是\_\_\_\_\_;

(2) 若  $B(3, 2)$ ,  $|PB| + |PF|$  的最小值\_\_\_\_\_.

### 四 最值与范围

例 1. 椭圆  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  上的点到直线  $l: x + y - 9 = 0$  的距离的最小值是\_\_\_\_\_.

例 2. 椭圆  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  的内接矩形的面积的最大值为\_\_\_\_\_.

例 3. 已知实数  $x, y$  满足  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ ,  $x^2 + y^2 - x$  的最大值为\_\_\_\_\_.

## 五.解析几何综合

例 1. 已知方程  $\frac{x^2}{m^2+n} - \frac{y^2}{3m^2-n} = 1$  表示双曲线, 且该双曲线两焦点间的距离为 4,

则  $n$  的取值范围是

- (A)  $(-1, 3)$       (B)  $(-1, \sqrt{3})$       (C)  $(0, 3)$       (D)  $(0, \sqrt{3})$

例 2. 设  $F_1F_2$  是双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的两个焦点, 点  $P$  是双曲线上的一

点, 若  $\angle F_1PF_2 = \alpha$ , 求证:  $\triangle F_1F_2P$  的面积为  $\frac{b^2}{\tan \frac{\alpha}{2}}$ .

(圆锥曲线简答题通用步骤)

例 3 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $y = x^2 - 6x + 1$  与坐标轴的交点都在圆  $C$  上.

(1) 求圆  $C$  的方程;

(2) 若圆  $C$  与直线  $x - y + a = 0$  交于  $A, B$  两点, 且  $OA \perp OB$ , 求  $a$  的值.

例 4. 在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C: y = \frac{x^2}{4}$  与直线  $y = kx + a$  ( $a > 0$ ) 交于  $M, N$  两点,

(I) 当  $k = 0$  时, 分别求  $C$  在点  $M$  和  $N$  处的切线方程;

(II)  $y$  轴上是否存在点  $P$ , 使得当  $k$  变动时, 总有  $\angle OPM = \angle OPN$ ? 说明理由.

例 5 已知点  $(1, e), \left(e, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  在椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 上, 其中  $e$  为椭

圆的离心率, 椭圆的右顶点为  $D$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 直线  $l$  过椭圆  $C$  的左焦点  $F$  交椭圆  $C$  于  $A, B$  两点, 直线  $DA, DB$  分别与直线  $x = -\frac{a}{e}$

交于  $N, M$  两点, 求证:  $\overrightarrow{NF} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$ .