

## 第 9 章 统计与概率

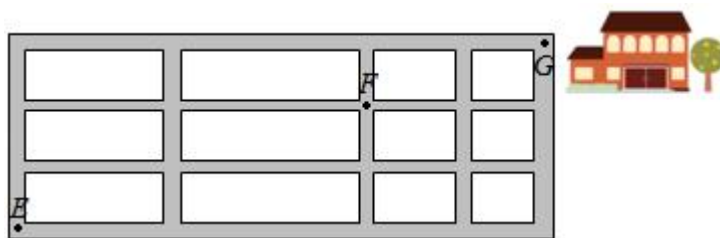
知识导图



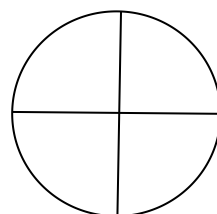
## 例题讲解

### 一 计数原理

例 1 如图，小明从街道的 E 处出发，先到 F 处与小红会合，再一起到位于 G 处的老年公寓参加志愿者活动，则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为（ ）



例 2(1)如图所示给四个区域涂色，用 3 中颜色可供选择，且相邻区域颜色不相同，一共有多少种涂法？



例 3 分别求出下列题意的排列组合数。

- (1) 6 名同学排成 3 排，前排 1 人，中间排 2 人，后排 3 人；
- (2) 6 名同学排成 1 排，甲不在排头，也不再排尾；
- (3) 6 名运动员参加接力比赛，甲不跑第一棒且乙不跑第六棒；
- (4) 6 人排成一排，甲乙不相邻；
- (5) 6 名同学已排好队，又来 3 名同学插入其中；
- (6) 有 6 个运动员名额，分给 4 个班；
- (7) 6 名同学平均分成三组，每组两人（组数不加以区分）；
- (8) 6 人排成一对，其中甲乙丙 3 人顺序一定；
- (9) 6 人围圆桌而坐。

例 4 (1)某世界 500 强公司计划在益阳、常德、岳阳、娄底、衡阳五个候选城市中投资 3 个不同的项目，且同一个城市投资项目不超过 2 个，则不同投资方案数是\_\_\_\_\_（用数字作答）。

(2)高三某班有甲乙等 7 名同学中选 4 名同学分享学习方法，要求甲乙至少一人参加，若甲乙同时参加，则他们发言时不能相邻，那么不同的发言顺序有\_\_\_\_\_种。

(3)桌面上有形状大小完全相同的红、白、黑球各 3 个，相同颜色的球不加以区分，将此 9 个球排成一行，共有\_\_\_\_\_种不同的排法。

例 5(1)甲乙丙等 5 人站成一排, 要求甲乙均不与丙相邻, 则排法种数为\_\_\_\_\_.

(2)现有 7 名同学排队, 甲乙不能相邻, 丙丁也不能相邻, 不同排法有\_\_\_\_\_种。

(3)某中学从 4 名男生和 3 名女生中推荐 4 人参加社会公益活动, 要求选出 4 人中既有男生又有女生, 则不同选法有\_\_\_\_\_种.

(4)分配 4 名工人去 3 个不同工地工作, 要求每人都去且只能去 1 个工地, 每个工地都有人去, 有\_\_\_\_\_种分配方案.

例 6(1)货架上共 12 件商品, 上层 4 件, 下层 8 件。现要从下层 8 件中取 2 件调整的上层, 其他商品不变, 则有\_\_\_\_\_种调整方法.

A 420      B 560      C 840      D 1680

(2)甲乙等 5 人担任学生会 4 个不同的岗位, 每个岗位至少 1 名, 且甲乙两人各自独立承担一个岗位, 则有\_\_\_\_\_安排方法.

A 36      B 60      C 72      D 144

(3)将 4 名实习教师分配到高一年级 3 个班实习, 若至少每班 1 名教师, 则不同的分配方案数\_\_\_\_\_.

A 12      B 36      C 72      D 108

例 7 相同元素分组法

(1)7 个相同的球装入 5 个盒中, 每盒至少一个有多少装法?

(2)6 本不同的书平均分成 3 堆, 每堆 2 本共有多少分法?

例 8  $(1 + \frac{1}{x^2})(1+x)^6$  展开式中  $x^2$  的系数为

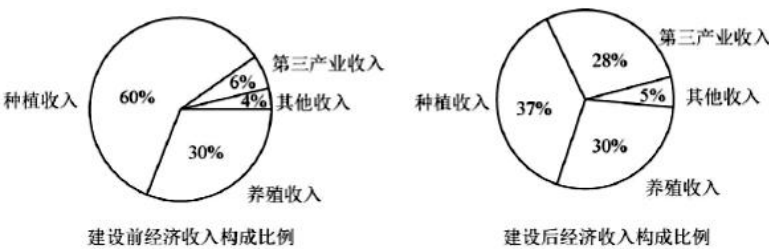
A.15      B.20      C.30      D.35

例 9 已知关于  $x$  的二项式  $\left(\sqrt{x} + \frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$  的展开式的二项式系数和为 32, 常数项为 80,

则各项系数和为\_\_\_\_\_.

二 统计初步

例 1 某地区经过一年的新农村建设，农村的经济收入增加了一倍，实现翻番。为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况，统计了该地新农村建设前后农村的经济收入构成比例，得到如下饼图所示，则下面结论中不正确的是



- A. 新农村建设后，种植收入减少；
- B. 新农村建设后，其他收入增加了一倍以上；
- C. 新农村建设后，养殖收入增加了一倍；
- D. 新农村建设后，养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半。

例 2. 下表是某厂 1~4 月用水量（单位：百吨）的一组数据如下表，已知  $y$  与  $x$  之间有较好的线性相关关系，其线性回归方程为  $\hat{y} = -0.7x + 5.25$  则  $a$  的值为（ ）。

$x$	1	2	3	4
$y$	4.5	$a$	3	2.5

- A 3.5
- B 3.85
- C 4
- D 4.35

例 3. 某公司为了了解用户对其产品的满意度，从 A，B 两地区分别随机调查了 20 个用户，得到用户对产品的满意度评分如下：

- A 地区：62 73 81 92 95 85 74 64 53 76  
78 86 95 66 97 78 88 82 76 89
- B 地区：73 83 62 51 91 46 53 73 64 82  
93 48 65 81 74 56 54 76 65 79

（I）根据两组数据完成两地区用户满意度评分的茎叶图，并通过茎叶图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度（不要求计算出具体值，得出结论即可）；

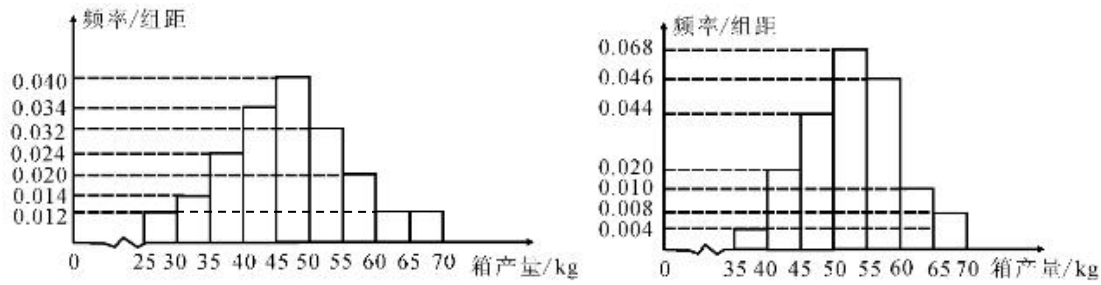
（II）根据用户满意度评分，将用户的满意度从低到高分三个不等级：

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

事件 C：“A 地区用户的满意度等级高于 B 地区用户的满意度等级”。假设两地区用户的评价结果相互独立。根据所给数据，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率，求 C 的概率。

A地区	B地区
4	
5	
6	
7	
8	
9	

例 4 海水养殖场进行某水产品的新(右图)、旧(左图)网箱养殖方法的产量对比,收获时各随机抽取了 100 个网箱,测量各箱产量(单位: kg)频率分布直方图如下:



- (1) 设两种养殖方法的箱产量相互独立, 记  $A$  表示事件“旧养殖法的箱产量低于 55kg, 新养殖法的箱产量不低于 55kg”, 估计  $A$  的概率;
- (2) 填写下面列联表, 并根据其判断是否有 99% 的把握认为箱产量不低于 55 千克与养殖方法有关:

	箱产量<55kg	箱产量≥55kg
旧养殖法		
新养殖法		

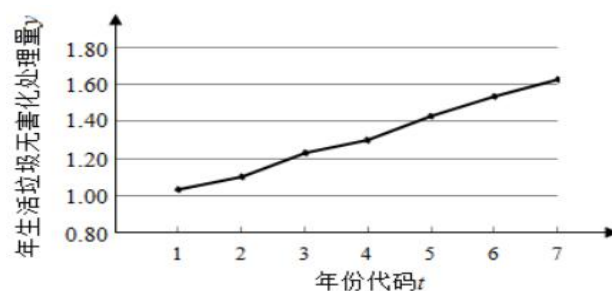
(3) 根据箱产量的频率分布直方图, 求新养殖法箱产量的中位数的估计值 (精确到 0.01)

附:

$P(\geq k_0)$	0.10	0.05	0.010	0.005	0.001
$k_0$	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

例 5 下图是我国近 2013-2019 年生活垃圾无害化处理量（单位：亿吨）的折线图.



(I) 由折线图看出，可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系，请用相关系数加以说明.

(II) 建立 y 关于 t 的回归方程(精确到 0.01)，预测 2021 年生活垃圾无害化处理量.

参考数据：  $\sum_{i=1}^7 y_i = 9.32$ ，  $\sum_{i=1}^7 t_i y_i = 40.17$ ，  $\sqrt{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2} = 0.55$ ，  $\sqrt{7} \approx 2.646$ .

参考公式：相关系数法 
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}}$$

回归直线方程：其中 
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

### 三 概率及概率分布

例 1 在三次独立重复实验中，事件 A 在每次发生的概率相同，若事件 A 至少发生一

次的概率为  $\frac{63}{64}$ ，则事件 A 恰好发生一次的概率是（ ）

- A  $\frac{1}{4}$       B  $\frac{3}{4}$       C  $\frac{9}{64}$       D  $\frac{27}{64}$

例 2 抛掷两枚硬币.

事件 A“第一枚为正面”

事件 B“第二枚为正面”

事件 C“两枚结果相同”

以上事件具有相互独立性的有：\_\_\_\_\_。

- (1) A、B      (2) A、C      (3) B、C

例 3 (1) 奖箱中有 100 张形状完全相同的奖券，其中设有 1 个奖项。甲、乙、丙三人获得抽奖资格，三人顺次抽出奖券，乙获奖的概率为\_\_\_\_\_。若已知甲首次抽取奖券未中奖，则乙中奖的概率为\_\_\_\_\_。

(2) 一个家庭有两个小孩，已知其中有一个是女孩，则另一个小孩是男孩的概率为（ ）。

- A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{2}{3}$

(3) 袋子 A 和 B 中装有若干个均匀的红球和白球，从中摸出一个红球的概率为  $\frac{1}{3}$ ，

从 B 中摸出一个红球的概率为 p. 若 A、B 两个袋子中球数之比为 1:2，将 A、B 中的球装在一起后，从中摸出的红球的概率是  $\frac{2}{5}$ ，则 p 的值是\_\_\_\_\_。

例 4 甲、乙两名射手互不影响进行射击训练，根据以往的数据统计，他们射击的成绩如下：

射手甲				射手乙			
环数	8	9	10	环数	8	9	10
概率	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	概率	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

若甲乙两射手各射击两次，求四次射击中，恰有三次命中 10 环的概率\_\_\_\_\_；

例 5 某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶 4 元，售价每瓶 6 元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶 2 元的价格当天全部处理完.根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温（单位：℃）有关.

如果最高气温不低于 25，需求量为 500 瓶；

如果最高气温位于区间[20，25)，需求量为 300 瓶；

如果最高气温低于 20，需求量为 200 瓶.

为确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得下面的频数分布表：

最高气温	[10，15)	[15，20)	[20，25)	[25，30)	[30，35)	[35，40)
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率。

- （1）求六月份这种酸奶一天的需求量  $X$ （单位：瓶）的分布列；
- （2）设六月份一天销售这种酸奶的利润为  $Y$ （单位：元），请你以利润的期望值为依据，判断这种酸奶一天的进货量为 300 瓶还是 400 瓶.

例 6 为评判设备 M 生产某种零件的性能，从设备 M 生产零件的流水线上随机抽取 100 件零件作为样本，测量其直径后，整理得到下表：

直径 /mm	58	59	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	73	合计
件数	1	1	3	5	6	19	33	18	4	4	2	1	2	1	100

经计算，样本的平均值  $\mu=65$ ，标准差  $\sigma=2.2$ ，以频率作为概率的估计值.

(1)为评判一台设备的性能，从该设备加工的零件中任意抽取一件，记其直径为  $X$ ，并根据以下不等式进行评判（ $P$  表示对应事件的概率）：

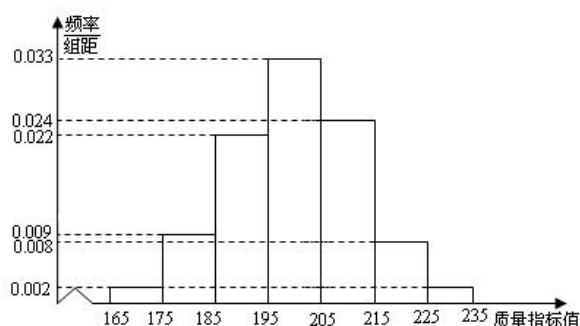
- ①  $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \geq 0.6826$ ;
- ②  $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \geq 0.9544$ ;
- ③  $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \geq 0.9974$ .

评判规则：若同时满足上述三个不等式，则设备等级为甲；仅满足其中两个为乙等；仅满足其中一个为丙等；全不满足为丁等，试判断设备 M 的性能等级；

(2)将直径小于  $\mu - \sigma$  或直径大于  $\mu + \sigma$  的零件认为是次品.

- (i) 从设备 M 的生产流水线上随意抽取 2 件零件，其中次品个数  $Y$ ，求  $E(Y)$ ;
- (ii) 从样本中随意抽取 2 件零件，计算其中次品个数  $Z$  的数学期望  $E(Z)$  .

例 7 从某企业的某种产品中抽取 500 件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量结果得如下频率分布直方图：



(I) 求这 500 件产品质量指标值的样本平均数  $\bar{x}$  和样本方差  $s^2$

(II) 由频率分布直方图可以认为，这种产品的质量指标值  $Z$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中  $\mu$  近似为样本平均数  $\bar{x}$ ， $\sigma^2$  近似为样本方差  $s^2$ 。

(i) 利用该正态分布，求  $P(187.8 < Z < 212.2)$ ；

(ii) 某用户从该企业购买了 100 件这种产品，记  $X$  表示这 100 件产品中质量指标值为于区间  $(187.8, 212.2)$  的产品件数，利用 (i) 的结果，求  $EX$ 。

附  $\sqrt{150} \approx 12.2$ 。若  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则  $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826$ ， $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$ 。

例 8.为了监控某种零件的一条生产线的生产过程,检验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件,并测量其尺寸(单位: cm). 根据长期生产经验,可以认为这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ .

(1) 假设生产状态正常,记  $X$  表示一天内抽取的 16 个零件中其尺寸在  $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$  之外的零件数,求  $P(X \geq 1)$  及  $X$  的数学期望;

(2) 一天内抽检零件中,如果出现了尺寸在  $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$  之外的零件,就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况,需对当天的生产过程进行检查.

(i) 试说明上述监控生产过程方法的合理性;

(ii) 下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸:

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

$$\text{经计算得 } \bar{x} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i = 9.97, \quad s = \sqrt{\frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{16} (\sum_{i=1}^{16} x_i^2 - 16\bar{x}^2)} = 0.212,$$

其中  $x_i$  为抽取的第  $i$  个零件的尺寸,  $i=1,2,\dots,16$ . 用样本平均数  $\bar{x}$  作为  $\mu$  的估计值  $\hat{\mu}$ , 用样本标准差  $s$  作为  $\sigma$  的估计值  $\hat{\sigma}$ , 利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查? 剔除  $(\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}, \hat{\mu} + 3\hat{\sigma})$  之外的数据, 用剩下的数据估计  $\mu$  和  $\sigma$  (精确到 0.01).  
附: 若随机变量  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(\mu - 3\sigma < Z < \mu + 3\sigma) = 0.9974$ ,  $0.9974^{16} \approx 0.9592$ ,  $\sqrt{0.008} \approx 0.09$ .