

第五章 函数

第2节 三角函数

一 任意角与弧度制

- 1、任意角 $\begin{cases} \text{正角: 按逆时针方向旋转形成的角} \\ \text{负角: 按顺时针方向旋转形成的角} \\ \text{零角: 不作任何旋转形成的角} \end{cases}$

2. 弧度制定义: 长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度.

注1: 半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l , 则角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha| = \frac{l}{r}$.

注2: 弧度制与角度制的换算公式: $2\pi = 360^\circ$, $1^\circ = \frac{\pi}{180}$, $1 = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ$.

角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度											

例1. 与 405° 角的终边相同的角 α 的集合是()

A. $\{\alpha | \alpha = -45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ B. $\{\alpha | \alpha = -405^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

C. $\{\alpha | \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ D. $\{\alpha | \alpha = 405^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

例2. 将分针拨快10分钟, 则分针转过的度数是_____.

例3. 已知扇形AOB的面积为4, 圆心角的弧度数为2, 则该扇形的弧长为_____.

例4. 已知 α 是第二象限角, 试判断 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角.

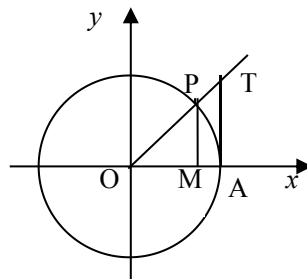
二 三角函数

1. 三角函数定义

设 α 是一个任意大小的角, α 的终边上任意一点P的坐标是 (x, y) , 它与原点的距离是 r ($r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$), 则

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

若点P是单位圆与角终边焦点, 则 $r=1$, 的 $\sin \alpha = y$, $\cos \alpha = x$.



2.三角函数相关公式第一部分:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$$

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha, \quad \tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

例 1. 角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边在直线 $y=2x$ 上, 则 $\cos \theta =$ _____.

例 2. 已知 $|\sin \alpha| > \frac{1}{2}$, $\tan \alpha \cdot \cos \alpha < 0$, 则角 α 的范围是_____.

例 3. 代数式 $\sin 120^\circ \cos 210^\circ$ 的值为()

A. $-\frac{3}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

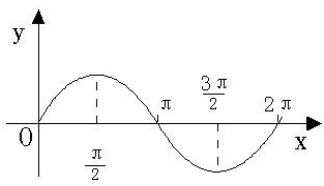
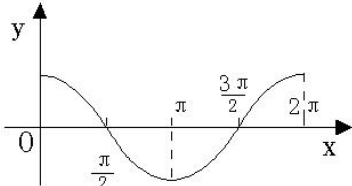
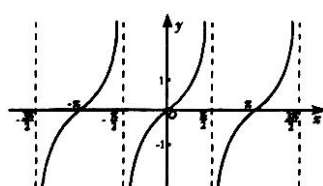
例 4. 已知 $\sin x = 2\cos x$, 求下列各式的值:

(1) $\frac{2\sin \alpha - 2\cos \alpha}{4\sin \alpha - 9\cos \alpha};$

(2) $4\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha - 5\cos^2 \alpha.$

例 5 化简
$$\frac{\sin(\pi - \alpha)\cos(\pi + \alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(3\pi - \alpha)\sin(3\pi + \alpha)\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)}$$

3.三角函数的图像

函数性质	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
图象			
定义域	R	R	$\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	R
周期性	2π	2π	π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
单调性 ($k \in Z$)	$\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ 增 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ 减	在 $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ ($k \in Z$) 增; 在 $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ 减函数.	$\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 增.
对称性	对称中心 $(k\pi, 0)$ ($k \in Z$) 对称轴 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in Z$)	对称中心 $\left(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0\right)$ ($k \in Z$) 对称轴 $x = k\pi$ ($k \in Z$)	对称中心 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$ ($k \in Z$) 无对称轴

例 1. 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 x 与 $\sin x$ 的大小关系是()

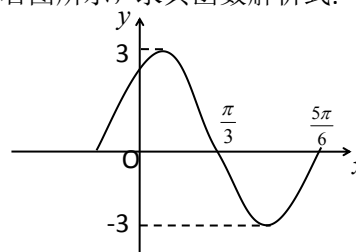
- A. $x > \sin x$ B. $x < \sin x$ C. $x \geq \sin x$ D. $x \leq \sin x$

例 2. 函数 $y = \sqrt{\log_2 \frac{1}{\sin x} - 1}$ 的定义域为_____.

3. 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ 的图像.

例 1. $y = \sin x$ 如何变换到 $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$.

例 2. $y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ ($A > 0, \omega > 0$) 部分图像如右图所示, 求其函数解析式.



例 3. 设函数 $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})$, 则下列结论错误的是

- A. $f(x)$ 的一个周期为 -2π B. $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{8\pi}{3}$ 对称
- C. $f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x = \frac{\pi}{6}$ D. $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递减

4. 三角函数和差公式与二倍角公式.

$$\begin{array}{ll} \sin(\alpha \pm \beta) = & \sin(2\alpha) = \\ \cos(\alpha \pm \beta) = & \cos(2\alpha) = \\ \tan(\alpha \pm \beta) = & \tan(2\alpha) = \end{array}$$

5. 辅助角公式

$$a \sin x + b \cos x =$$

例 1. α, β 均为锐角, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{4}{5}$, $\sin \beta =$ _____.

例 2. $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{5}$, $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) =$ _____.

例 3. 已知函数 $f(x) = 2\sin x \cos x - 2\sqrt{3} \cos^2 x + \sqrt{3} + a$

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 设 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)$ 的最小值为 -2 , 求 $f(x)$ 的最大值.