

第6章 平面向量/复数

第1节 平面向量

一 向量的定义及表示

1. 向量定义：既有大小又有方向的量叫做**向量**；只有大小没有方向的量称为**数量**。

2. 向量的表示：①有向线段起点指向终点如： \overrightarrow{AB} 。

②用印刷黑体 \boldsymbol{a} 或书写 \vec{a} 表示。

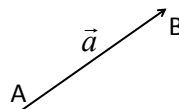
3. 向量的大小也就是有向线段的长度叫做向量的**模**，记作 $|\vec{a}|$ ；

长度为0的向量叫做**零向量**，长度为1的向量叫做**单位向量**。

4. 方向相同或相反的向量叫做**平行向量**。向量可以平移，故平行向量又称**共线向量**。

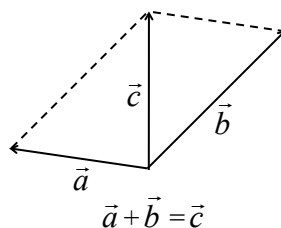
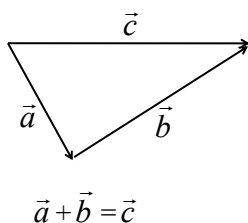
规定零向量与任意向量平行，故向量平行不具有传递性。

5. 长度相等且方向相同的向量叫做**相等向量**。



二 平面向量的线性运算

1. 向量加法：满足平行四边形定则或三角形定则。



注： $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ 。

2. 向量减法：减去一个向量等于加上其相反向量。（规定 $\mathbf{0}$ 的相反向量仍是 $\mathbf{0}$ ）。

3. 向量的数乘：实数 λ 与向量 \vec{a} 相乘，记作 $\lambda \vec{a}$ ，其结果：

(1) $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$

(2) $\lambda > 0$ 时， $\lambda \vec{a}$ 方向与 \vec{a} 相同； $\lambda < 0$ 时， $\lambda \vec{a}$ 方向与 \vec{a} 相反； $\lambda = 0$ 时， $\lambda \vec{a} = \vec{0}$ ；

4. 向量共线基本定理： \vec{b} 与非零向量 \vec{a} 共线（或平行） \Leftrightarrow 存在唯一实数 λ 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ 。

5. 平面向量基本定理：如果 \vec{e}_1 、 \vec{e}_2 是同一平面内两个不共线向量，那么对这一平面任意一个向量，有且只有一对实数 λ_1 、 λ_2 使得 $\vec{P} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$ 。其中 \vec{e}_1 、 \vec{e}_2 为这个平面的一组基底。

三 向量坐标表示

1. 点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 。

2. $\vec{a} = (x_1, y_1)$ 、 $\vec{b} = (x_2, y_2)$ ，则 $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$ 。 $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

3. $\vec{a} = (x_1, y_1)$ 、 $\vec{b} = (x_2, y_2)$ ，若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $x_1 y_2 = x_2 y_1$

四 向量的数量积

1. $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ 的数量积: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$

2. $|\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 表示 \vec{b} 在 \vec{a} 方向上的投影.

3. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. 若 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 为锐角 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, 若 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 钝角 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

4. 若 $\vec{a} = (x, y)$, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

例 1. 下列物理量是向量的有_____.

(1) 质量; (2) 速度; (3) 位移; (4) 力;

(5) 加速度; (6) 路程; (7) 密度; (8) 功.

例 2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, 则四边形 ABCD 的形状是_____.

例 3. 平行四边形 ABCD 中, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, O 为对角线交点, M 为 BD 的三等分

点, 用 \vec{a} 、 \vec{b} 表示出 \overrightarrow{AO} 、 \overrightarrow{AM} .

例 4 已知向量 $\vec{a} = (2, 4)$, $\vec{b} = (-1, 1)$, 则 $|2\vec{a} - \vec{b}| =$ _____.

例 5 已知向量 \vec{a} , \vec{b} 满足 $\vec{a} = (2, 0)$, $|\vec{b}| = 1$, \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 120° , $|\vec{a} + 2\vec{b}| =$ _____.

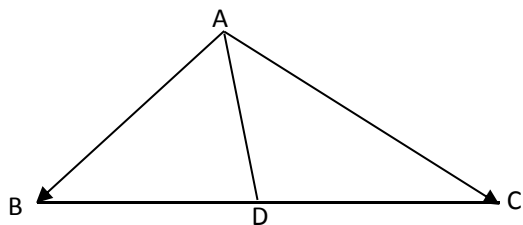
例 6 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-3, 2)$. 若 $k\vec{a} + 2\vec{b}$ 与 $2\vec{a} - 4\vec{b}$ 平行, 则实数 k 的值为_____.

若 $k\vec{a} + 2\vec{b}$ 与 $2\vec{a} - 4\vec{b}$ 垂直, 则实数 k 的值为_____.

例 7 等边三角形各边长为 1, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$,

则 $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} =$ _____.

例 8 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 中点, $AD = 3, BC = 10$, 求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ _____.



第2节 复数

一 复数的概念

1. 虚数单位 i

2. 复数 $(a+bi)$ $\begin{cases} \text{实数} \\ \text{虚数} \end{cases}$

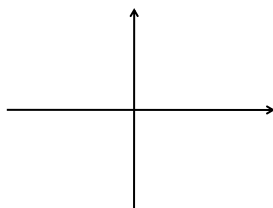
其中 $a, b \in \mathbb{R}$, a 叫做实部, b 叫做虚部, 当 $a=0$ 时 z 为纯虚数.

3. 复数相等: 若 $a+bi=c+di$, 则 $a=c$, $b=d$.

二 复平面

1. 从实数轴到复平面

2. 复数的模: 复数所表示的点到原点的距离.



三 复数的运算

1. 共轭复数

2. 复数加、减、乘、除运算与整式运算规律类同.

3. 复数加法的几何意义: 若 $z_1+z_2=z_3$, 且这三个数表示的点

分别为 Z_1, Z_2, Z_3 , 则 $\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2} = \overrightarrow{OZ_3}$.

例1 若复数 z 的模为 $\sqrt{2}$, 且 $z + \bar{z} = 2$, 则 $z =$ _____.

例2 例1已知 $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i^{2020}$, \bar{z} 的虚部是 ()

A. i B. $-i$ C. 1 D. -1

例3 设复数 z 满足 $\frac{1+z}{1-z} = i$, 则 $|z| =$ _____.